(3) $$\sin x + \sin(x+2y) = 2\sin(x+y)\cos y \ldots$$
(4) $$\cos x + \cos(x+2y) = 2\cos(x+y)\cos y \ldots$$

Helyettesítve (3) szerint (1)-be (4) szerint (2).be, keletkezik

(1a) $$\sin(x+y)[1+2\cos y] = \sin\varphi \ldots$$
(2a) $$\cos(x+y)[1+2\cos y] = \cos\varphi \ldots$$

Utóbbi egyenlet mindkét oldalát négyzetre emelve és összeadva:

$$\left[\sin^2(x+y)+\cos^2(x+y)\right]\left[1+2\cos y\right]^2 = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi,$$

tehát

(5) $$(1+2\cos y)^2 = 1 \quad \text{vagyis} \quad 4\cos^2 y + 4\cos y = 0 \ldots$$

Innen:

$$\cos y = 0 \qquad \text{és} \qquad \cos y = -1.$$

I. Ha $\cos y = 0$, akkor $1a)$ és $2a)$-ból:

$$\sin(x+y) = \sin\varphi \quad \text{és} \quad \cos(x+y) = \cos\varphi,$$

tehát $x+y=\varphi$ és $\cos y = 0$ miatt $y = \frac{\pi}{2}$ vagy $\frac{3\pi}{2}$[1] .

Eszerint

$$x = \varphi - \frac{\pi}{2} \quad \text{vagy} \quad x = \varphi - \frac{3\pi}{2}.$$

II. Ha $\cos y = -1$, akkor $1a)$ és $2a)$-ból:

$$-\sin(x+y) = \sin\varphi \quad \text{és} \quad -\cos(x+y) = \cos\varphi.$$

Ez csak úgy lehet, ha $x+y = \varphi+\pi$.

$\cos y = -1$ alapján $y=\pi$, tehát $x = \varphi$[2].

Nádler Miklós (Kossuth Lajos g. VII. o. Pestszenterzsébet.)

[1] Általában: $x+y=\varphi+2k\pi$, $y=\frac{\pi}{2}+l\pi$ és $x=\varphi-\frac{\pi}{2}+n\pi$, ahol l ill. n bármely egész szám.

[2] Általában $x+y=\varphi+(2k+1)\pi$, $y=(2l+1)\pi$ és így $x=\varphi+2n\pi$.