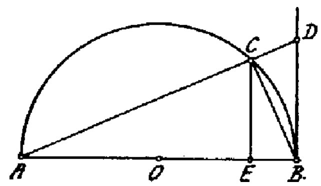
ABC a C-nél derékszögű háromszög. A derékszögű háromszög befogójára vonatkozó tétel szerint: $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AE} = 2Rx$



Minthogy $CE \parallel DB$, írhatjuk: $CD : EB = AC : AE$. Innen

$$\overline{CD}^2 = \frac{\overline{EB}^2 \cdot \overline{AC}^2}{CE^2} = \frac{(2R-x)^2 2Rx}{x^2} = \frac{2R(2R-x)^2}{x}$$

Továbbá: $DB : CE = AB : AE$ tehát

$$\overline{DB}^2 = \frac{\overline{CE}^2 \cdot \overline{AB}^2}{\overline{AE}^2} = \frac{x(2R-x)4R^2}{x^2} = \frac{(2R-x)4R^2}{x}$$

Ezek alapján egyenletünk:

$$2R \cdot x + \frac{2R(2R-x)^2}{x} + \frac{(2R-x)4R^2}{x} = 4a^2,$$

ill. kellő rendezés után:

$$f(x) \equiv Rx^2 - \left(3R^2 + a^2\right)x + 4R^2 = 0.$$

Feladatunknak oly x érték felel meg, mely valós, pozitív és $2R$-nél kisebb. Az $f(x) = 0$ egyenlet gyökei valósak, ha

$$\left(3R^2 + a^2\right)^2 - 16R^4 \equiv \left(3R^2 + a^2 + 4R^2\right)\left(3R^2 + a^2 - 4R^2\right) \geq 0.$$

Az első tényező mindig pozitív; a második sem lehet negatív. Kell tehát, hogy $a^2 \geq R^2$ legyen.

A gyökök szorzata: $4R^2$ és összege: $\dfrac{3R^2 + a^2}{R}$ pozitív, tehát mind a két gyök pozitív. $\sqrt{4R^2} = 2R$ a gyökök mértani középarányosa; ebből következik, hogy az egyik kisebb, a másik nagyobb $2R$-nél, határesetben mindegyik $= 2R$.

Eszerint a feladatnak csak egy megoldása van, hacsak $a^2 \geq R^2$ mégpedig

$$x = \frac{3R^2 + a^2 - \sqrt{(a^2 + 7R^2)(a^2 - R^2)}}{2R}.$$

Horváth Sándor (Br. Kemény Zsigmond g. VI. o. Bp.)