Legyen $x^3 = y$. Az $y^2 - 16\sqrt{5}y + 64 = 0$

egyenlet gyökei: $8\sqrt{5} \pm \sqrt{64 \cdot 5 - 64} = 8(\sqrt{5} \pm 2)$ alakban írhatók.

Tehát $x^6 - 16\sqrt{5}x^3 + 64 = \left[x^3 - 8(\sqrt{5}+2)\right]\left[x^3 - 8(\sqrt{5}-2)\right]$.

Vizsgáljuk meg, hogy $8(\sqrt{5} \pm 2)$ nem tekinthető-e $a\sqrt{5} \pm b$ alakú szám köbének?

$$(a\sqrt{5}+b)^3 = 5a^3\sqrt{5} + 15a^2b + 3\sqrt{5}ab^2 + b^3 = 8\sqrt{5} + 2,$$

ha az $5a^3 + 3ab^2 = 8, \quad 15a^2b + b^3 = 16$

egyenletrendszernek van megoldása. Ilyen megoldás nyilván $a = 1$, $b = 1$. Ha $b = -1$ $(a = 1)$, akkor az első egyenlet változatlan marad, míg a másodikban a jobb oldalon -16-ot kapunk. Eszerint

$$8(\sqrt{5}+2) = (\sqrt{5}+1)^3, \quad 8(\sqrt{5}-2) = (\sqrt{5}-1)^3.$$

Így: $x^6 - 16\sqrt{5}x^3 + 64 = \left[x^3 - (\sqrt{5}+1)^3\right]\left[x^3 - (\sqrt{5}-1)^3\right]$.

Azonban ismeretes, hogy $x^3 - A^3 = (x-A)(x^2 + Ax + A^2)$, tehát

$$\begin{aligned} x^3 - (\sqrt{5}+1)^3 &= (x - \sqrt{5} - 1)\left[x^2 + x(\sqrt{5}+1) + 6 + 2\sqrt{5}\right] \\ x^3 - (\sqrt{5}-1)^3 &= (x - \sqrt{5} + 1)\left[x^2 + x(\sqrt{5}-1) + 6 - 2\sqrt{5}\right]. \end{aligned}$$

Az $(x^2 + Ax + A^2)$-nek megfelelő másodfokú kifejezések nem bonthatók fel valós tényezőkre, mert discriminánsuk $A^2 - 4A^2 = -3A^2 < 0$.

Faragó Kálmán (Izr. g. VI. o., Debrecen) ,