I. Megoldás. (1) szerint adva van a két ismeretlen összege. Vegyük hozzá az ismeretlenek különbségét, úgy hogy $x-y=2z$ legyen. Ha z-t meghatároztuk, akkor x és y egyszerűen számítható.

(1) $$x+y=2a\ldots$$

és

(3) $$x-y=2z\ldots$$

alapján

$$x=a+z, \quad y=a-z.$$

Helyettesítve ezeket (2)-be:

$$(a^2-z^2)\left[(a+z)^2+(a-z)^2\right]=2b^4, \quad \text{ill.} \quad (a^2-z^2)2(a^2+z^2)=2b^4.$$

Tehát:

(4) $$a^4-z^4=b^4 \quad \text{és} \quad z=\pm\sqrt[4]{a^4-b^4}\ldots$$

x értéke és így x, y is valós, ha $a^4\geq b^4$ vagy $a^2\geq b^2$.
Eszerint

(5) $$x=a+\sqrt[4]{a^4-b^4}, \quad y=a-\sqrt[4]{a^4-b^4}\ldots$$

x és y ezen értékei felcserélhetők. (Szimmetrikus egyenletrendszerrel van dolgunk!)

A megadott numerikus értékekkel:

$$x=10+\sqrt[4]{10000-9375}=10+\sqrt[4]{625}=15 \text{ és } y=5,$$

vagy pedig

$$x=5 \text{ és } y=15.$$

Baán Sándor (Bencés g. VI. o. Kőszeg).

II. Megoldás. A (2) egyenlet írható így is:

$$xy\left[(x+y)^2-2xy\right]=xy(4a^2-2xy)=2b^4.$$

(6) $$\text{Ha most } xy=u, \quad \text{akkor} \quad u^2-2a^2u+b^4=0\ldots$$

Ezen egyenlet gyökei valósak, ha $a^4-b^4\geq 0$, azaz $a^2\geq b^2$.
(6)-ból

$$u=xy=a^2\pm\sqrt{a^4-b^4}.$$

Eszerint x és y a következő egyenletek gyökei:

(7) $$X^2-2aX+u_1=0\ldots$$
(8) $$X^2-2aX+u_2=0\ldots$$

ahol

$$u_1=a^2+\sqrt{a^4-b^4} \quad \text{és} \quad u_2=a^2-\sqrt{a^4-b^4}.$$

A (7) gyökei nem valósak, mert

$$a^2-u_1=a^2-a^2-\sqrt{a^4-b^4}=-\sqrt{a^4-b^4}<0.$$

A (8) gyökei azonban valósak, mert $a^2-u_2=\sqrt{a^4-b^4}>0$.

A (8) gyökei $x_{1,2}=a\pm\sqrt{\sqrt{a^4-b^4}}=a\pm\sqrt{a^4-b^4}$.
Ha $X_1=x$, akkor $X_2=y$, ill. $X_1=y$, $X_2=x$.
A numerikus értékeket l. az I. megoldásban.

Pfeifer Béla (Izr. g. V.o. Bp.).

Jegyzet: $a^4-b^4=(a^2-b^2)(a^2+b^2)\geq 0$, ha $a^2-b^2\geq 0$. Ugyanis $a^2+b^2\geq 0$, hacsak a és b valós számok.

$$a^2-b^2\geq 0 \quad \text{ha} \quad |a|\geq|b|.$$