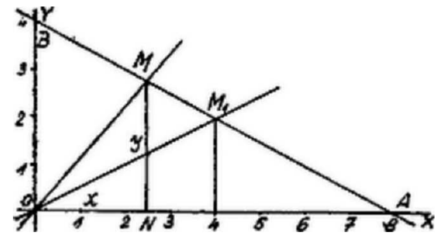
I. Megoldás. Az $y=-\frac{1}{2}x+4$ egyenes az X-tengelyt az $A(x=8,\ y=0)$ pontban, az Y-tengelyt a $B(x=0,\ y=4)$ pontban metszi. Ezen két pont meghatározza az egyenest.

$y=mx$ az origon átmenő egyenest jelent. Ha $m=0$, akkor az X-tengellyel esik össze. Miközben m változik 0-tól $+\infty$-ig, az $y=mx$ egyenes az O körül forog, az X-tengelyből kiindulva, a pozitív forgási irányban, amíg az Y-tengellyel esik össze. A szilárd egyenessel való metszéspontja A-tól B-ig mozog, tehát M abscissája 8-tól 0-ig fogy.

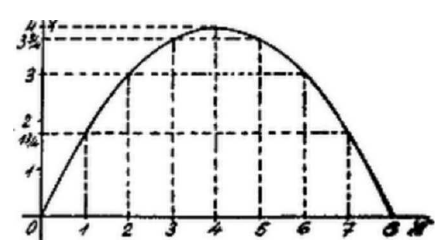


Az $OMN\triangle$ területe, ha M koordinátái $(x,\,y)$, $t=\frac{xy}{2}$. Minthogy M-re nézve

$$y=-\frac{1}{2}x+4,$$
$$t=-\frac{1}{4}x^2+2x,$$

ahol x értéke 8-tól 0-ig fogy. Amint látjuk, az $OMN\triangle$ területe az x másodfokú függvénye, mely az $x=8$ és $x=0$ helyeken zérus. Ezen függvénynek maximuma van, minthogy x^2 együtthatója negatív, még pedig az $x=\frac{1}{2}OA=4$ helyen. Itt $t_{\max}=4$.

Eszerint az $OMN\triangle$ területe 0-tól növekedik 4-ig, azután fogy 0-ig (a növekedéssel szimmetrikusan az $x=4$ egyenesre nézve). A terület változását egy parabola íve tünteti fel, melynek csúcspontja a görbe felső tetőpontja, főtengelye az $x=4$ egyenes.



Részletesebb értéktáblázat:

x	0		1		2		3		4		5		6		7		8
t	0	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{15}{4}$	$\searrow$	3	$\searrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	0

Jesch Aladár (Kegyesrendi g. VI. o. Bp.)

II. Megoldás. Az $OMN\triangle$ területét kifejezhetjük, mint az m ir. határozó függvényét. Ugyanis az M pont koordinátáira nézve

$$y=-\frac{1}{2}x+4 \text{ és } y=mx.$$

Innen

$$x=\frac{8}{2m+1},\quad y=\frac{8m}{2m+1}$$

és

$$t=\frac{xy}{2}=\frac{32m}{(2m+1)^2}\dots \tag{1}$$

$m=0$ és $m=+\infty$ mellett $t=0$. Ha m változik 0-túl $+\infty$-ig, t értéke mindig pozitív. Minthogy t az m-nek folytonos függvénye m szóbanforgó értékei mellett, kell, hogy legalább egy legnagyobb értéke legyen. Hogy ezt megállapíthassuk, vizsgáljuk meg, hogy a

$$t=\frac{32m}{(2m+1)^2},\quad \text{ill.}\quad 4tm^2+(4t-32)m+t=0\dots \tag{2}$$

egyenletnek a t mely értékei mellett van valós megoldása?

Nyilván akkor, ha az egyenlet discriminánsa:

$$(4t-32)^2-16t^2 \geqq 0 \quad \text{vagyis} \quad t \leqq 4.$$

Eszerint az $OMN\triangle$ területének legnagyobb értéke 4.

A (2) egyenlet gyökeinek összege: $\dfrac{32-4t}{4t}$, szorzata: $\dfrac{t}{4t}=\dfrac{1}{4}$.
Ha $0<t<4$, a gyökök összege és szorzata is pozitív; így mind a két gyök pozitív.

Ha $t=4$, akkor $m=\dfrac{1}{2}$. (Az M pontra nézve: $x=4$, $y=2$).

Vizhányó Ferenc (Áll. Szent-István g. VI. o. Bp. XIV.)

Jegyzet. A $t=\dfrac{32m}{(2m+1)^2}$ függvényt ábrázoló görbe aszimptotikusan közeledik az X-tengelyhez.