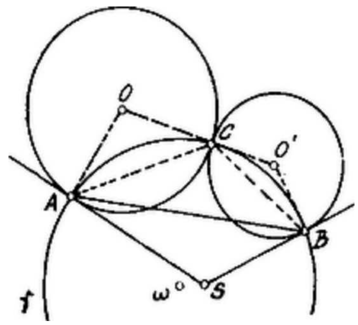
A feladat követelményének megfelelő körök legyenek, ábránk szerint, O és O'. Érintkezési pontjukat, C-t, kössük össze A-val és B-vel. Az OO' centrális a C ponton megy keresztül.



Határozzuk meg az $ABC\sphericalangle$ nagyságát:

(1) $$ABC\sphericalangle = 180^\circ - (OCA\sphericalangle + O'CB\sphericalangle)\dots$$

Vegyük figyelembe, hogy az OCA ill. $O'CB$ egyenlőszárú háromszögekben:

$$2OCA\sphericalangle = 180^\circ - AOC\sphericalangle.$$

ill.

$$2O'CB\sphericalangle = 180^\circ - BO'C\sphericalangle$$

Így

(2) $$OCA\sphericalangle + O'CB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{1}{2}(AOC\sphericalangle + BO'C\sphericalangle)\dots$$

Már most az $SAOO'B$ ötszögben a szögek összege $3\cdot 180^\circ$.

A szögek között A-nál és B-nél derékszögek vannak, úgy hogy

(3) $$AOC\sphericalangle + BO'C\sphericalangle = 2\cdot 180^\circ - ASB\sphericalangle\dots$$

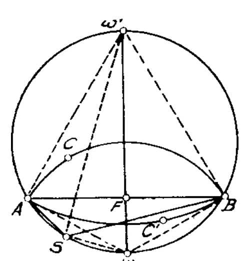
Tekintettel erre, (2)-ben

$$OCA\sphericalangle + O'CB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(2\cdot 180^\circ - ASB\sphericalangle\right) = \frac{1}{2}ASB\sphericalangle$$

és így (1)-ből:

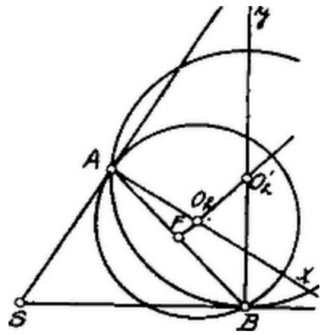
$$ACB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{1}{2}ASB\sphericalangle,$$

azaz az $ACB\sphericalangle$ állandó: C mértani helye oly γ kör íve, melynek pontjaiból az AB távolság $ASB\sphericalangle$ felének kiegészítő szöge alatt látható!



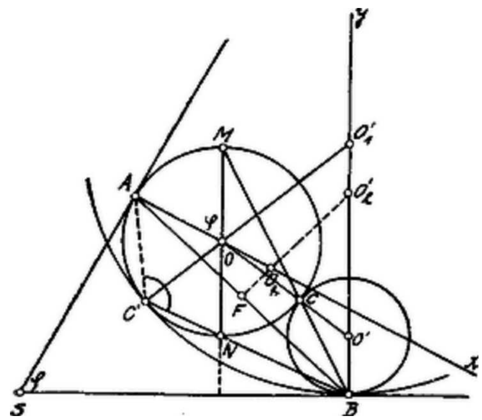
Jegyzet. A γ kör középpontja ω. Minthogy $ACB\sphericalangle = 180^\circ - \frac{1}{2}ASB\sphericalangle$, ennek megfelelő középponti szög $360^\circ - ASB\sphericalangle$ és így $A\omega B\sphericalangle = ASB\sphericalangle$. Ebből következik, hogy A, B, S, ω egy körön feküsznek, melyet az A, S, B pontok határoznak meg. Ha AB-re, felezőpontjában merőlegest állítunk, ezen merőleges az (A, S, B) kört az ω és ω' pontokban metszi. ω a kör azon ívén fekszik, amelyiken S, és $S\omega$ felezi az $ASB\sphericalangle$ mellékszögét (az $ASB\triangle$ külső szögfelezője) $S\omega$ felezi az $ASB\sphericalangle$-et. (Steiner Iván.)

Az 1204. gyakorlatban az $ASB\sphericalangle$ szárai egy e egyenesbe esnek. Az ott szereplő O és O' körök között csakis ***külső*** érintkezés lehetséges. Feladatunk ezeknek megfelelő körökre vonatkozik. Amíg az 1204. gyakorlatban O és O' befuthatják az e egyenesre állított Ax ill. By merőlegeseket és bármely helyzetük mellett csak külső érintkezés lehetséges, a szóbanforgó esetünkben a viszonyok másképpen is alakulhatnak.



Állítsunk az $ASB\sphericalangle$ AS szárára az A pontban, a BS szárára a B pontban merőlegest, Ax-et ill. By-t. Az AB távolság F felezőpontjában állítsunk AB-re merőlegest; ez a By-t O'_h-ben, Ax-et az O_h-ban metszi. [1] O'_h oly kör középpontja, mely SB-t a B pontban érinti és keresztülmegy A-n. Már most azon kör, mely SA-t A-ban érinti és az (O'_h) kört is érinti, csak az A pontba zsugorodott kör lehet. (A C pont az A-ba esik!)

Hasonlóan O_h oly kör középpontja, mely SA-t az A-ban érinti és keresztülmegy a B ponton. Azon kör, mely SB-t B-ben érinti és az (O_h) kört is érinti, csak a B pontba zsugorodott kör lehet. (A C pont a B-be esik).



Eszerint az (O) kör O középpontja az Ax egyenesnek AO_h darabját, az (O') kör O' középpontja a By egyenesnek BO'_h darabját futhatja be.

Ha O ill. O' az AO_h darabon, ill. BO_h darabon kívül esik, akkor is lesznek a feltételnek megfelelő körök, csakhogy ***belső*** érintkezéssel. Ilyen körök C' érintkezési pontjai azon kör ívén feküsznek, melynek középpontja ω'. Ezen esetekben

$$AC'B\sphericalangle = 90^\circ + \frac{\varphi}{2} \quad \text{és} \quad A\omega' B\sphericalangle = 180^\circ - \varphi.$$

(Ádám László).

Az összetartozó O és O' körök szerkesztése a következőképpen történhetik: az Ax egyenesen tetszőlegesen (O_h-n belül) felvett O pontból megrajzoljuk az OA sugarú (O) kört. Az O ponton keresztül SB-re merőleges MN átmérőt húzunk; BM az (O) kört a C, BN pedig a C' pontban metszi. C az O és O', C' az O és O'_1 körök hasonlósági pontja. OC a By-t az O', OC' a By-t az O'_1 pontban metszi. $O'B$ sugarú kör SB-t a B, az (O) kört a C pontban érinti. Az O'_1B sugarú kör az SB-t a B-ben, az (O) kört a C'-ben érinti. [2]

Az $AC'B\sphericalangle \equiv AC'N\sphericalangle$. Utóbbi az (O) körben oly kerületi szög, mely az $\widehat{NMA}$ ívhez tartozik. Azonban $\widehat{NMA} = 180^\circ + \varphi$; ugyanis $\widehat{NM} = 180^\circ$ és $\widehat{MA}$ ív az AOM középponti szögnek felel meg. De $AOM\sphericalangle = ASB\sphericalangle$, mert száraik megfelelően merőlegesek egymásra.

Az $ASB\sphericalangle$-et felező egyenes az Ax-et, ill. By-t oly kör középpontjában metszi, mely az ASB szög szárait érinti. Az első esetben az (O) körhöz tartozó egyik (O') kör az SB egyenes, a második esetben az (O') körhöz tartozó egyik (O) kör az SA egyenes. (Belső érintkezés!)

[1] A h index határhelyzetet jelent.

[2] Ha az O'_1 körből indulunk ki, azaz keresünk olyan O kört, mely SA-t az A-ban érinti és (O'_1)-t is érinti, ilyen kettő lesz: az egyik az O, a másik azonban az $ASB\sphericalangle$ ***szárain kívül*** fekszik, és középpontja az ω' körnek az $ASB\sphericalangle$ szárain kívül eső részén.