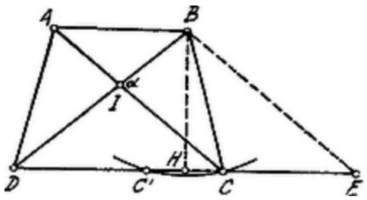
I. Megoldás. Tegyük fel, hogy $ABCD$ a keresett trapéz és $AB < CD$. Húzzunk a B csúcsból az AC átlóval párhuzamosat és ez DC meghosszabbítását messe E-ben. Ekkor $BE = AC = d$.



Az így keletkező DBE egyenlőszárú háromszög megszerkeszthető; ugyanis ismeretesek egyenlő oldalai: $BD = BE = d$ és az általuk bezárt szög az átlók egyik szögével egyenlő (párhuzamos egyenesek metszésével keletkező megfelelő szögek).

$DBE\triangle$ megszerkesztése után a B középpontból $BC = c$ sugárral kört szerkesztünk; ezen kör DE-t a trapéz C csúcsában metszi. C pontból BE-vel, B-ből DE-vel párhuzamost húzva, ezek az A csúcsban metszik egymást.

Hogy a szerkesztés lehetséges legyen, szükséges és elegendő, hogy 1) a B pontból c sugárral szerkesztett kör messe a DE egyenest, vagyis c legalábbis akkora legyen, mint a $DBE\triangle$ ill. a trapéz BH magassága: 2) a C pont D és E között legyen, azaz a $c < d$. Egybefoglalva a két feltételt: $BH < c < d$.

Ha $BIC\sphericalangle = 60^\circ$, azaz $DBE\sphericalangle = 120^\circ$, akkor $HBE\sphericalangle = 60^\circ$ és így $BH = \frac{1}{2}\ BE = \frac{1}{2}d$. A szerkesztés lehetőségének feltétele:

$$\frac{d}{2} \le c < d.$$

Ha $c = \frac{d}{2}$, akkor a $(B,\ c)$ kör érinti DE-t; a trapézból derékszögű négyszög lesz.

A $(B,\ c)$ kör a DE-t még egy C' pontban metszi; ezen C' pontból kiindulva az előbbihez hasonló szerkesztéssel ugyanolyan trapézt kapunk, mint amilyen $ABCD$, csakhogy akkor AB lesz a párhuzamos oldalak nagyobbika.

II. Megoldás. Legyen $ABCD$ a keresett trapéz és $AB < CD$. A szimmetrikus trapézban az átlók I metszéspontja a trapéz szimmetriatengelyén fekszik, azaz $DIC\triangle$ egyenlőszárú: $DI = IC$. Ha már most a $DIC\sphericalangle$ (vagy mellékszöge) ismeretes, akkor az $IDC\sphericalangle \equiv BDC\sphericalangle$ is adva van és így a $BCD\triangle$-ben két oldal és a kisebbikkel szembenfekvő szög ismeretes.[1] A szerkesztés az ismert módon végezhető; két háromszöget kapunk, BCD-t és $BC'D$-t, amelyek közül – ha $AB < CD$ – a $BCD\triangle$-et használjuk fel a trapéz szerkesztésére. (L. az I. megoldást!)

A szerkesztés lehetőségének feltételei ugyanazok, mint I. alatt.

Ha $BIC\sphericalangle = 60^\circ$, akkor $BDC\sphericalangle = 30^\circ$ és $BH = \frac{1}{2}\ BD = \frac{1}{2}d$.

Koren Pál (áll. Fazekas Mihály g. VI. o. Debrecen)

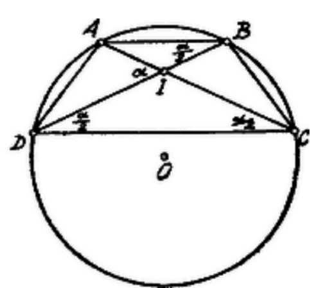
III. Megoldás. Kiindulhatunk abból is, hogy a szimmetrikus trapéz húrnégyszög, tehát igyekezzünk a köréje írt kört megszerkeszteni. Ha az előbbi jelöléseket megtartva, $AID\sphericalangle = \alpha$ van adva, akkor, mivel ABI és CDI egyenlőszárú háromszögek, melyekre nézve α külső szög,

$$ABD\sphericalangle \equiv ABI\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$$

és

$$ACD\sphericalangle \equiv ICD\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Ebből következik, hogy B és C oly körön feküsznek, melyben az AD húrhoz $\frac{\alpha}{2}$ kerületi szög tartozik: így tehát ezen kör megszerkeszthető. Ezen körben A-ból $AC = d$, D-ből $DB = d$ hosszúságú húrokat szerkesztünk: így megkapjuk BC-t is.



[1] Ha konvex trapézról van szó, akkor $c < d$!

A szerkesztés lehetőségének feltétele, hogy d legfeljebb akkora legyen, mint a kör átmérője és $d > c$, hogy a trapéz konvex legyen.

Ha $\alpha = 60^\circ$, akkor c a körbe írt szabályos hatszög oldalával egyenlő; a kör átmérője $2c$ és a szerkesztés lehetőségének feltétele

$$c < d < 2c,$$

ugyanaz, mint I. alatt.

Steiner Gábor (Toldy Ferenc g. IV. o. Bp.)