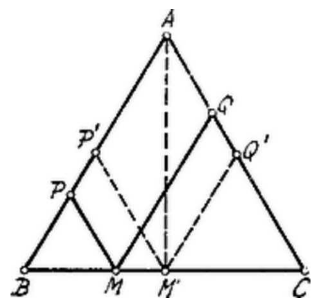
1^0. Ha az $ABC\,\Delta$ egyenlőoldalú, akkor a BPM és MQC háromszögek is azok, tehát

$$PM = BM, \quad QM = QC \text{ és}$$
$$AP + PM + QM + AQ = AP + PB + AQ + QC = AB + AC = 2a,$$

azaz az *$APMQ$ parallelogramma kerülete állandó.*



E parallelogramma területe az $APQ\,\Delta$ területének kétszerese, azaz

$$t = 2 \cdot \frac{1}{2} AP \cdot AQ \sin 60^\circ = AP \cdot AQ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ha $AP = x$, akkor $AQ = a - x$ és

$$t = x(a-x)\frac{\sqrt{3}}{2} = (-x^2 + ax)\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

t értéke legnagyobb akkor, amidőn $x = AP = \frac{a}{2} = AQ$.

Eszerint t értéke változik 0-tól egy maximumig; ezen maximum az $ABC\,\Delta$ területének fele és akkor áll elő, midőn M a BC-t felezi. Ezután a maximumtól ismét zérusig csökken. $\left(t_{\max} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}\right)$.

2^0. Ha M' a BC felezőpontja, akkor P' ill. Q' is felezi AB-t ill. AC-t. Ebben az esetben $AP'M'Q'$ rombus.

A BC körüli forgatással keletkező test térfogatát megkapjuk, ha az ABC forgatásából keletkező test térfogatából kivonjuk a $BP'M'$ és $M'Q'C$ forgatása által keletkező testekét. Azonban utóbbi kettő egyenlő és mindegyikük az $ABC\,\Delta$ forgási test köbtartalmának $\frac{1}{8}$ részét teszi, mert megfelelő méreteik aránya $1:2$. Eszerint a keresett térfogat $1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$ része az $ABC\,\Delta$ forgási test térfogatának. Ez pedig oly kettős kúp, melynek alapja $AM' = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$ sugarú; magasságuk pedig $2 \cdot \frac{a}{2} = a$. Így tehát

$$\frac{1}{3}\pi\overline{AM'}^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3a^2}{4} \cdot a = \frac{\pi}{4}a^3$$

és

$$V = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{4}a^3 = \frac{3\pi}{16}a^3.$$

Deák András (Érseki g. VI. o. Bp. II.)