**I. Megoldás.** Az egyenletben szereplő négyzetgyök valós, ha $x^2 \leq a^2$. Ezért az egyenletnek csak olyan megoldását vehetjük figyelembe, amely ezen követelményt kielégíti.

Az egyenletet

$$3x^2 - 2a^2 = a\sqrt{a^2 - x^2} \ldots \tag{1}$$

alakban írjuk és tegyük fel, hogy $a > 0$. Ekkor kell, hogy legyen:

$$3x^2 - 2a^2 > 0 \quad \text{azaz} \quad a^2 \geq x^2 > \frac{2a^2}{3} \ldots \tag{2}$$

Az 1) egyenlet mindkét oldalán négyzetre emelve és rendezve,

$$9x^4 - 11a^2x^2 + 3a^4 = 0$$

és innen $\alpha = (x^2)_1 = \dfrac{11 + \sqrt{13}}{18}a^2$, $\beta = (x^2)_2 = \dfrac{11 - \sqrt{13}}{18}a^2$.

Ezek közül a 2) feltételnek csak $\alpha = \dfrac{11 + \sqrt{13}}{18}a^2$ felel meg és így az adott egyenletet

$$x = \pm\frac{a}{3}\sqrt{\frac{11 + \sqrt{13}}{2}} \quad \text{elégíti ki.}$$

A $\beta$-val jelzett érték a $3x^2 + a\sqrt{a^2 - x^2} - 2a^2 = 0$ egyenletnek gyöke.

Ha $a < 0$, akkor $x^2 < \dfrac{2a^2}{3}$ tartozik lenni és ezen esetben a $\beta$ elégíti ki az 1) egyenletet, míg $\alpha$ a $3x^2 + a\sqrt{a^2 - x^2} - 2a^2 = 0$ egyenletet.

*Freud Géza* (Berzsenyi Dániel g. V. o. Bp. V.).

**II. Megoldás.** Legyen $\sqrt{a^2 - x^2} = y$, ahol $y > 0$ tartozik lenni. Ekkor

$$x^2 = a^2 - y^2.$$

Behelyettesítve az adott egyenletbe:

$$3(a^2 - y^2) - ay - 2a^2 = 0, \quad \text{ill.} \quad 3y^2 + ay - a^2 = 0.$$

Innen, mivel $y > 0$, $y = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 12a^2}}{6} = \dfrac{\sqrt{13} - 1}{6}a$, *hacsak* $a > 0$
és

$$x^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{13} - 1}{6}\right)^2 a^2 = \frac{11 + \sqrt{13}}{18}a^2,$$

tehát

$$x = \pm\frac{a}{3}\sqrt{\frac{11 + \sqrt{13}}{2}} \sim \pm 0{,}9a.$$

*Steiner Iván* (Toldy Ferenc r. V. o. Bp. II.)

*Kiegészités.* Ha $a < 0$, akkor $y > 0$ azon esetben áll elő, amidőn

$$y = \frac{-\sqrt{13} - 1}{6}a = -\frac{\sqrt{13} + 1}{6}a$$

és

$$x^2 = a^2 - \left(\frac{\sqrt{13} + 1}{6}\right)^2 a^2 = \frac{11 - \sqrt{13}}{18}a^2$$

$$x = \pm\frac{a}{3}\sqrt{\frac{11 - \sqrt{13}}{2}} \sim \pm 0{,}64a.$$