I. Megoldás. A bizonyítandó tulajdonságnak szükséges és elegendő feltétele, hogy az

$$a^{n+4}-a^{n}$$

különbségben az egyesek helyén zérus álljon, azaz

$$a^{n+4}-a^{n}=a^{n}(a^{4}-1)$$

osztható legyen 10-zel, tehát 2-vel és 5-tel.

Ha a páros, akkor a^n, ha a páratlan, akkor a^4-1 páros. Tehát $a^n(a^4-1)$ mindig osztható 2-vel.

Ha a az 5 többszöröse, akkor a^n is az.

Ha a nem többszöröse 5-nek, akkor a^2-ben az egyesek helyén 1, 4, 6, 9 számok egyike áll; tehát vagy a^2-1, vagy a^2+1 és így ezek szorzata a^4-1 osztható 5-tel.

Grosz László (Balassi Bálint rg. VI. o. Balassagyarmat).

II. Megoldás.

$$a^{n+4}-a^{n}=a^{n}(a^{4}-1)=a^{n}(a-1)(a+1)(a^{2}+1).$$

Azonban

$$a^{2}+1=(a^{2}-4)+5=(a-2)(a+2)+5.$$

Így

$$a^{n+4}-a^{n}=a^{n-1}(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5a^{n}(a^{2}-1).$$

A jobboldal első tagjában öt egymásután következő egész szám szorzata áll: ezek egyike osztható 5-tel is, tehát szorzatuk 10-zel. A második tag is osztható 10-zel, mert vagy a^n vagy a^2-1 páros szám.

Eszerint $a^{n+4}-a^{4}$ osztható 10-zel.

Jakab Károly (Kath. g. VI. o. magántanuló, Kalocsa).
Szittyai Dezső (Wagner reálg. IV. o. Rákospalota).

III. Megoldás. Ha valamely számban az egyesek helyén 0, 1, 5, vagy 6 áll, bármely hatványukban az egyesek helyén 0, 1, 5, ill. 6 áll. Ezekre tehát a tétel közvetlenül láthatóan igaz.

Ha az egyesek helyén 3, 7, 9 áll, akkor negyedik hatványuk $10m+1$ alakú. Ha ilyen számmal szorozzuk a^n-t, akkor a szorzatban (a^{n+4}) ugyanazon szám áll az egyesek helyén, mint a^n-ben.

Ha az egyesek helyén 2, 4, 8 áll, negyedik hatványuk $10m+6$ alakú. Ha a páros a^n számot – melynek utolsó jegye tehát 2, 4, 6, 8, oly számmal szorozzuk, mely az egyesek helyén 6 áll, a szorzata (a^{n+4}) egyeseinek helyén ugyanazon szám fog állani, mint a^n-ben.

Bulkay Lajos (Bencés g. VI. o. Győr).