Az egyenletben szereplő négyzetgyökök megállapodás szerint mindig csak egy értéket, a pozitívet jelentik. Négyzetre emelve mindkét oldalon:

$$2x+3+5x+1+2\sqrt{(2x+3)(5x+1)}=12x+13.$$

Összevonás után:

$$2\sqrt{(2x+3)(5x+1)}=5x+9\ldots \tag{1}$$

Hangsúlyozva azt, hogy $5x+9>0$, ismét négyzetre emelünk:

$$40x^2+68x+12=25x^2+90x+81 \quad \text{ill.} \quad 15x^2-22x-69=0\ldots \tag{2}$$

Ezen egyenlet discriminánsa: $4(121+69\cdot 15)=4\cdot 1156=(2\cdot 34)^2$.
A (2) gyökei:

$$x_1=\frac{22+68}{30}=3, \quad x_2=\frac{22-68}{30}=-\frac{23}{15}.$$

Meg kell vizsgálnunk, kielégítik-e ezen értékek az eredeti irracionális egyenletet?

$x_1=3$ megfelel az $5x+9>0$ feltételnek és azon követelménynek is, hogy az eredeti egyenletben a négyzetgyök jel alatt álló kifejezéseket is pozitívvá teszi:

$$\sqrt{2\cdot 3+3}=\sqrt{9}=+3, \quad \sqrt{5\cdot 3+1}=\sqrt{16}=+4, \quad \sqrt{12\cdot 3+13}=\sqrt{49}=+7.$$

Valóban

$$3+4=7.$$

$x_2=-\dfrac{23}{15}$ megfelel az $5x+9>0$ feltételnek, azonban az eredeti egyenletben a négyzetgyökjel alatti kifejezések negatív értékűek:

$$2x_2+3=-\frac{1}{15}, \quad 5x_2+1=-\frac{100}{15}, \quad 12x_2+13=-\frac{81}{15}.$$

A négyzetgyökök eszerint képzetesek és mivel

$$-i\sqrt{\frac{1}{15}}+10i\sqrt{\frac{1}{15}}=9i\sqrt{\frac{1}{15}}\ldots \tag{3}$$

x_2 a

$$-\sqrt{2x+3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{12x+13}\ldots \tag{4}$$

egyenletet elégíti ki. (x_2 idegen gyök!)

Jakab Károly (kath. gimn. VI. o. magántanuló Kalocsa).

Jegyzet. Több ízben rámutattunk arra, hogy a négyzetgyökös irracionális egyenletből a négyzetreemelés által oly racionális egyenlethez jutunk, amelynek gyökei nem gyökei feltétlenül az eredeti egyenletnek. Ezért minden egyes esetben behelyettesítéssel meg kell győződnünk, hogy a kapott gyök-értékek kielégítik-e az eredeti egyenletet. Megállapíthatjuk továbbá, hogy az idegen gyök mely egyenletnek gyöke?

Ha arra gondolunk, hogy egyenletünket grafikus úton is oldjuk meg, akkor

$$\sqrt{2x+3}, \quad \sqrt{5x+1}, \quad \sqrt{12x+13}$$

csak valós értékeket jelenthetnek, tehát kell, hogy legyen

$$2x+3\geq 0, \quad 5x+1\geq 0, \quad 12x+13\geq 0,$$

azaz az $x\geq -\dfrac{3}{2}$, $x\geq -\dfrac{1}{5}$, $x\geq -\dfrac{13}{12}$ feltételeket kell kielégítenünk. Ez megtörténik, ha $x\geq -\dfrac{1}{5}$.

Ebből a szempontból tehát a megoldásban szereplő 4) egyenletnek nincs jelentősége.

Nehány megoldásban azon állítás szerepel, hogy „mivel az eredeti egyenlet *elsőfokú*, csak egy megoldása lehet.” Ha az egyenletben x-nek törtfüggvénye vagy irracionális függvénye szerepel, nem beszélünk fokszámról.

Előfordult egyes megoldásokban a következő igazolása annak, hogy $x_2=-\dfrac{23}{15}$ is kielégíti az egyenletet. Helyettesítve ugyanis ezen értéket az eredeti egyenletbe, keletkezik:

$$\sqrt{-\frac{1}{15}}+\sqrt{-\frac{20}{3}}=\sqrt{-\frac{27}{5}}.$$

Idáig helyes. *Négyzetre emelve, valóban:* $-\dfrac{1}{15}+2\sqrt{\dfrac{20}{45}}-\dfrac{20}{3}=-\dfrac{27}{5}$.

Itt két hiba van. Először: ha $a=b$, akkor $a^2=b^2$. De ha $a^2=b^2$, abból $a=\pm b$ következik.

Másodszor:

$$\sqrt{-\frac{1}{15}} = i\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \sqrt{-\frac{20}{3}} = i\sqrt{-\frac{20}{3}},$$

tehát szorzatuk:

$$i^2\sqrt{-\frac{20}{45}} = -\sqrt{\frac{20}{45}}.$$

Más szóval: a négyzetgyökök szorzásának azon szabálya, amely szerint „gyökjel alatt szorzunk”, nem érvényes akkor, ha a négyzetgyökök imaginárius számokat jelentenek.