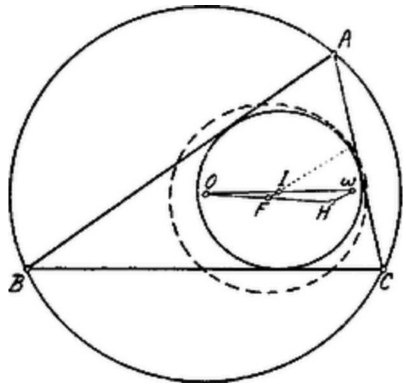
r_k jelentse az $ABC\triangle$ köré, r_b pedig oly kör sugarát, mely a háromszög oldalait érinti. [1] Jelentse O az előbbi, I az utóbbi kör középpontját. Ekkor az $OI = d$ távolságra és az $r_k,\ r_b$ sugarakra nézve fennáll az Euler-féle összefüggés: [2]

$$d^2 = r_k^2 \pm 2r_k r_b.$$

A jobboldalon $+$ érvényes, ha a második kör a háromszög oldalait kívülről, a $-$ jel, ha belülről érinti.

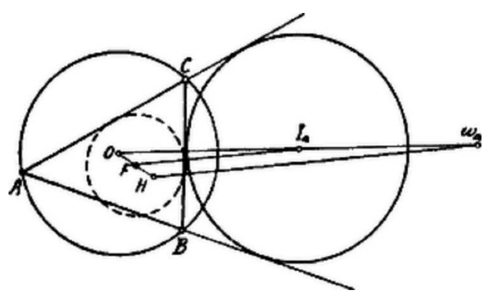
Ha már most az adott két kör középpontjainak d távolsága eleget tesz az Euler-féle összefüggésnek, akkor végtelen sok olyan háromszög létezik, mely az r_k sugarú körbe és az r_b sugarú kör köré van írva. Ha azonban d értéke nem felel meg az Euler-féle összefüggésnek, akkor nem létezik ilyen háromszög. [2]



Legyen már most az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontja O, a beírt kör középpontja I, magassági pontja H és az OH távolság felezőpontja F, a háromszög Feuerbach-körének középpontja. Ezen kör sugara tudvalevőleg $\frac{1}{2}r_k$. *A Feuerbach kört az $ABC\triangle$-be írt kör belülről érinti.*
E két kör centrálisa

$$FI = \frac{1}{2}r_k - r_b. \quad ^3$$

Vegyük fel az OI egyenesen az O-val I-re nézve szimmetrikus pontot ω-t, azaz $O\omega = 2OI$.



Minthogy $OH = 2OF$, nyilván

$$\omega H = 2FI = r_k - 2r_b,$$

azaz a H magassági pont oly kört ír le, melynek középpontja a szilárd ω pont és sugara $r_k - 2r_b$.

Ha I_j oly kör középpontja, mely a háromszög oldalait kívülről érinti, akkor a *Feuerbach-kör a háromszög ezen hozzáírt körét kívülről érinti.* Most tehát

$$FI_j = \frac{1}{2}r_k + r_b \quad \text{és} \quad \omega_j H = 2FI_j = r_k + 2r_b,$$

ha t. i. ω_j és O és az I_j-re szimmetrikus pontok. $(j = a,\ b,\ c)$.

Bármelyik esetben, az Euler-féle összefüggés alapján

$$\omega H = \frac{d^2}{r_k},$$

ahol $d = OI$ vagy OIj.

[1] A kör köré írt háromszög oldalai a kör érintői. A kör a háromszögre nézve beírt kör vagy hozzáírt kör.
[2] L. KÜRSCHÁK: Matematikai Versenytételek c. műben, a 33. oldalon.
[3] $r_k > 2r_b$!