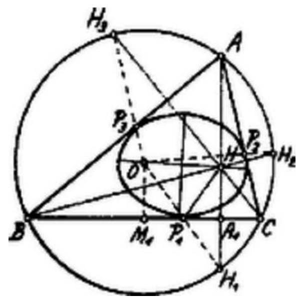
Ismeretes, hogy a H magassági pontnak az oldalakra vonatkozó tükörképei a körülírt körön feküsznek. Legyen H tükörképe BC oldalra vonatkozólag H_1. Kössük össze O-t H_1-val; OH_1 a BC oldalt P_1-ben metszi. P_1 az ellipszis pontja, mert – a szimmetria miatt –

$$P_1H_1 = P_1H, \quad \text{tehát} \quad OP_1 + P_1H = OP_1 + P_1H_1 = R,$$

azaz a P_1 pontnak az O és H gyújtópontokból való távolságainak összege az ellipszis nagytengelyével (R) egyenlő. Azonban BC felezi a $HP_1H_1\sphericalangle$-et és így BC az ellipszist a P_1 pontban *érinti.*



Ha tehát az O pontot összekötjük a H pontnak az $ABC\triangle$ oldalaira való tükörképeivel, az összekötő egyenesek a háromszög oldalait a szóbanforgó ellipszis érintési pontjaiban metszik.

Az OH távolság F felezőpontja az $ABC\triangle$ Feuerbach-körének középpontja, a szóbanforgó ellipszis középpontja. A Feuerbach-kör átmérője az $ABC\triangle$ köré írt kör sugarával egyenlő; eszerint az $ABC\triangle$ Feuerbach-köre az ellipszis *főköre.*

A Feuerbach-kör keresztülmegy a BC oldal M_1 felezőpontján és az AH magasság A_1 talppontján. Mint az ellipszis főköre, keresztülmegy a gyújtópontoknak (O és H) az érintőn való vetületein (M_1 és A_1).

Egger Géza (Fáy András g. VII. o. Bp. IX.)

Jegyzet. I. Az ellipszis tulajdonságai közé tartozik, hogy a gyújtópontoknak valamely érintőtől való távolságainak szorzata állandó, a fél kis tengely négyzetével egyenlő.

Az adott esetben a félnagytengely $\frac{R}{2}$, a lineáris excentricitás fele $\frac{OH}{2}$.
Ki kell mutatnunk tehát, hogy

$$\overline{OM_1} \cdot \overline{HA_1} = \frac{R^2 \cdot \overline{OH}^2}{4}.$$

Ismeretes, hogy $OM_1 = \frac{AH}{2}$; továbbá $HA_1 = \frac{HH_1}{2}$.
Eszerint $OM_1 \cdot HA_1 = \frac{AH \cdot HH_1}{4}$.
Azonban $\overline{AH} \cdot \overline{HH_1}$ a H pont hatványának abszolut értéke a háromszög köré írt körre nézve és így

$$\overline{AH} \cdot \overline{HH_1} = R^2 - \overline{OH}^2, \quad \text{azaz} \quad \overline{OM}_1 \cdot \overline{HA}_1 = \frac{R^2 - \overline{OM}^2}{4}. \qquad (Q.\ e.\ d.)$$

II. Az $ABC\triangle$ köré írt kör a szóbanforgó ellipszis egyik vezérköre. V. ö. az 1478. feladat II. megoldását, évfolyamunk 6. számában.

III. Fel kellett tételeznünk, hogy a háromszög hegyesszögű; ha egyenlő oldalú, akkor az ellipszisből kör lesz. (O és H összeesik.)

Ha a háromszög derékszögű, pl. a C csúcsnál, akkor $H \equiv C$ és $OH = OC = R$. Az ellipszis gyújtópontjai a nagy tengely végpontjaiba esnek, tehát az ellipszis egy egyenes vonaldarabbá zsugorodik össze (OC).

Ha a háromszög tompaszögű, akkor H a körülírt körön kívül fekszik, azaz $OH > R$. Ekkor a háromszög oldalai nem ellipszist érintenek, hanem hiperbolát, amelynek P pontjaira nézve $|OP - HP| = R$.

IV. Ha a háromszögbe írt ellipszis egyik gyújtópontja a háromszög H magassági pontja, akkor ebből már következik, hogy a másik gyújtópont a körülírt kör O középpontja és így az ellipszis nagy tengelye R, a körülírt kör sugara. Ugyanis a H pontnak az oldalakon, mint az ellipszis érintőin való vetületei meghatározzák a háromszög Feuerbach-körét, mint az ellipszis főkörét. Ennek átmérője a körülírt kör R sugarával egyenlő.

A háromszög Feuerbach-köre keresztülmegy az oldalak felezőpontjain: ezek tehát az ellipszis másik gyújtópontjának vetületei az érintőkön. Eszerint a másik gyújtópont a háromszög köré írt kör O középpontja.