A szóbanforgó egyenlőtlenség helyességét arra az esetre mutatjuk ki, ha $\dfrac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}<\dfrac{\pi}{2}$.

Az egyenlőtlenség baloldalán álló törtet, a rövidség kedvéért jelölje A.
Nyilván

$$A=\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}\quad \text{és}\quad A:\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}\cdot\frac{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}{\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}}{\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}}\tag{1}$$

Az (1) jobboldalát csökkentjük, ha a számlálót csökkentjük és a nevezőt növeljük azáltal, hogy

$$\cos h<\frac{\sin h}{h}<1\ldots\tag{2}$$

alapján $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}{\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}$ helyett a nála kisebb $\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$-t és

$\dfrac{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}$ helyett 1-et írunk. Eszerint

$$A:\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}>\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}=\frac{(\sin\gamma+\sin\beta)}{2\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)}\tag{3}$$

Az 1487. feladatban foglaltak szerint $\sin\gamma+\sin\beta>\dfrac{2}{\pi}(\gamma+\beta)$; továbbá (2) szerint $2\sin\frac{1}{2}(\beta+\alpha)<\beta+\alpha$, úgy, hogy

$$A:\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\gamma+\beta}{\beta+\alpha}\quad\text{ill.}\quad A>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\gamma+\beta}{\beta+\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}\ldots\tag{4}$$

Azonban $\dfrac{\gamma+\beta}{\beta+\alpha}>1$ és feltevésünk szerint $\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}<1$
tehát

$$\frac{\gamma+\beta}{\beta+\alpha}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}$$

és így

$$A>\frac{4}{\pi^2}\cdot\left(\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}\right)^2\ldots\tag{5}$$

Taksony György (ág. ev. g. VIII. o. Bp.).

Jegyzet. A (4)-ből (5)-höz jutunk akkor is, ha

$$\frac{\gamma+\beta}{\beta+\alpha}>\frac{2}{\pi}\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}\quad\text{azaz}\quad\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}<\frac{\pi}{2}\frac{\gamma+\beta}{\beta+\alpha}.$$

Ez a $\dfrac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}$ tört értékére nagyobb közt enged.

A feladatot más korrekciókkal megoldották: Jakab K., Klein J., Sándor Gy.

Jegyzet. Az 1488. és az előbbi feladat sajtóhibával került ki. Ezekben bizonyos becslés került meg nem felelő alakban kifejezésre. A helyes tétel, melyet megoldásával közlünk, a következő:

Legyen $0<\alpha<\beta<\gamma\le\dfrac{\pi}{2}$. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\frac{\cos\beta-\cos\gamma}{\cos\alpha-\cos\beta}>\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}.$$

Turán.

Megoldás. Legyen $\gamma - \beta = \delta_1, \quad \beta - \alpha = \delta_2$. Vizsgáljuk az

$$f(\beta) = \frac{\cos\beta - \cos(\beta + \delta_1)}{\cos(\beta - \delta_2) - \cos\beta}$$

függvény változását, miközben δ_1 és δ_2-t állandónak tekintjük.

β változik δ_2-től $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)$-ig: $\qquad \delta_2 \le \beta \le \frac{\pi}{2} - \delta_1$ [1]

Ugyanis

$$\delta_1 + \delta_2 = \gamma - \alpha < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Hogy $f(\beta)$ változását ismerjük, állapítsuk meg $f'(\beta)$ előjelét az előbb jelzett intervallumban.

$$f(\beta) = \frac{2\sin\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right)\sin\frac{\delta_1}{2}}{2\sin\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right)\sin\frac{\delta_2}{2}}.$$

$\dfrac{\sin\frac{\delta_1}{2}}{\sin\frac{\delta_2}{2}}$ állandó, pozitív szám; tehát

$$\operatorname{sign} f'(\beta) = \operatorname{sign}\frac{d}{d\beta}\frac{\sin\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right)}{\sin\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right)} =$$

$$= \operatorname{sign}\left[\sin\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right)\cos\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right) - \sin\left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right)\cos\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right)\right] = {}^{2}$$

$$= \operatorname{sign}\sin\left[\left(\beta - \frac{\delta_2}{2}\right) - \left(\beta + \frac{\delta_1}{2}\right)\right] = -\operatorname{sign}\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = -1.^{3}$$

Eszerint $f(\beta)$ állandóan csökken, miközben növekszik δ_2-től $\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)$-ig, azaz $f(\beta)$ legkisebb értékét a $\frac{\pi}{2} - \delta_1$ helyen kapjuk. Tehát

$$f(\beta) \ge \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 + \delta_1\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1 - \delta_2\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta_1\right)}$$

$$f(\beta) \ge \frac{\sin\delta_1}{\sin(\delta_1 + \delta_2) - \sin\delta_1} = \frac{\sin\delta_1}{2\sin\frac{\delta_2}{2}\cos\left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{2}\right)}.$$

A tört értékét kisebbítjük, ha 1) számlálóját kisebbítjük, azaz az 1487. feladat eredménye szerint $\sin\delta_1$ helyett $\frac{\pi}{2}\delta_1$-t vesszük, 2) nevezőjét növeljük azáltal, hogy $\sin\frac{\delta_2}{2}$ helyett $\frac{\delta_2}{2}$-t és $\cos\left(\delta_1 + \frac{\delta_2}{2}\right)$ helyett 1-et írunk:

$$f(\beta) > \frac{\frac{2}{\pi}\delta_1}{2\frac{\delta_1}{2}} = \frac{2}{\pi}\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{2}{\pi}\frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha}.$$

[1] Az egységsugarú kör első negyedén jelöljük ki az α, β, γ ívek végpontjait, A, B, C-t: $\widehat{AB} = \beta - \alpha = \delta_2$ és $\widehat{BC} = \gamma - \beta = \delta_1$. A B pont a kör negyedívén két határ között mozoghat, ha δ_2 és δ_1 ívkülönbségek állandók. E határpontok egyike, ha A-t levisszük ($\alpha = 0$) az X tengelyre, δ_2 ív végpontja; a másik határpont, ha C az Y tengelyre kerül ($\gamma = 90°$), a $\frac{\pi}{2} - \delta_1$ nagyságú ív végpontja.

[2] $f'(\beta)$ nevezője pozitív.

[3] $\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} < \frac{\pi}{2}$.