I. Megoldás. Derékszögű koordinátarendszerünk X-tengelye legyen a parabola tengelye, Y-tengelye a parabola csúcsérintője; ezen rendszerben a parabola egyenlete:

$$y^2 = 2px \ldots \tag{1}$$

A parabola $M(\xi,\ \eta)$ pontjában húzott érintő irányhatározója: $\dfrac{p}{\eta}$. A parabola $O(0,\ 0)$ pontján átmenő és az előbbi érintőre merőleges egyenes egyenlete:

$$y = -\frac{\eta}{p}x \ldots \tag{2}$$

Az M ponton és az $F\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$ ponton átmenő egyenes egyenlete:

$$\frac{y}{x-\dfrac{p}{2}} = \frac{\eta}{\xi-\dfrac{p}{2}} \quad \text{ill.} \quad \left(\xi-\frac{p}{2}\right)y = \eta\left(x-\frac{p}{2}\right)\ldots \tag{3}$$

A (2) és (3) egyenletekből álló egyenletrendszert kielégítő $(x,\ y)$ értékpár a P pont koordinátáit szolgáltatja, mint ξ és η függvényeit. ξ és η között azonban az

$$\eta^2 = 2p\xi \ldots \tag{4}$$

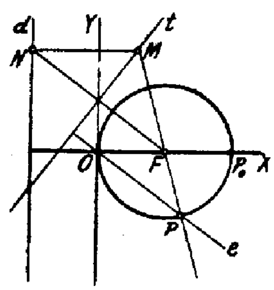
összefüggés áll fenn. Hogy a P pont x, y koordinátái között olyan egyenletet kapjunk, mely nem tartalmazza ξ-t és η-t,

a (2), (3) és (4) egyenletekből kiküszöböljük ξ-t és η-t.

(2)-ből $\eta = -p\dfrac{y}{x}$; (3)-ból $\xi = \dfrac{p(p-x)}{2x}$.

η és ξ ezen értékeit (4)-be helyettesítve:

$$p^2\frac{y^2}{x^2} = 2p\frac{p(p-x)}{2x} \qquad \text{ill.} \qquad x^2+y^2-px = 0\ldots[1] \tag{5}$$



Eszerint a P pont mértani helyének egyenlete:

$$x^2+y^2-px = 0.$$

Ez oly kört jelent, melynek középpontja a parabola $F\left(\dfrac{p}{2},\ 0\right)$ gyújtópontja és sugara $\dfrac{p}{2}$. A kör keresztülmegy az origon.

Baán Sándor (Bencés g. VII. o. Kőszeg.)

Kiegészítés. Ezen körnek az Y-tengelyen két pontja van: $O(0,0)$ és $P_0(p,0)$. Ezek, mint *határhelyzetek* tartoznak a mértani helyhez. Ha M az O-hoz közeledik, P a P_0-hoz közeledik; ha M a végtelen felé tart, akkor P az O-hoz közeledik.

[Ugyanis (3)-ból $x-\dfrac{p}{2} = \left(\xi-\dfrac{p}{2}\right)\dfrac{y}{\eta}$.

(2)-ből $\dfrac{y}{\eta} = -\dfrac{x}{p}$, tehát $\dfrac{2x-p}{x} = -\dfrac{1}{p}(2\xi-p)$.

Ha $\xi = 0$, $\dfrac{2x-p}{x} = 1$ és innen $x = p$. Ez a P_0 abscissája.

---

[1] Az (5) egyenlet úgy keletkezik, hogy az előbbi mindkét oldalát x^2-ével szorozzuk.
$x^2 = 0$ az Y-tengely egyenlete; azonban az Y-tengely nem tartozhatik a mértani helyhez, mert a P pontok az O ponton átmenő egyenesek pontjai.

Ha $\xi \to \infty$, $\dfrac{2x-p}{x} = \left(2 - \dfrac{p}{x}\right) \to \infty$, tehát $x \to 0$. (Ez az O).]

II. Megoldás. Legyen a parabola vezérvonala a d egyenes, az M vetülete d-n N, tehát $MN = MF$. Ismeretes, hogy a parabola t érintője az M pontban merőleges FN-re. Minthogy $OP \perp t$, $OP \parallel NF$; továbbá $OF \parallel MN$. Ebből következik, hogy

$$OFP\sphericalangle = NMF\sphericalangle \quad \text{és} \quad OPF\sphericalangle = NFM\sphericalangle,$$

tehát

$$OFP\triangle \sim MNF\triangle\,.$$

Azonban $NMF\triangle$ egyenlőszárú, amelyben $MN = MF$, ezért $OFP\triangle$ is egyenlőszárú úgy, hogy $FP = OF =$ constans.

Eszerint a P pont mértani helye kör, melynek középpontja F és sugara $= OF$.

Káli L. Tibold (Bencés g. VIII. o. Pápa.)