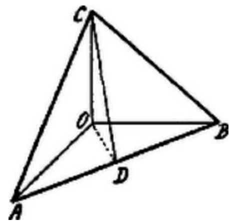
A tetraéder térfogata: $\frac{1}{3}(AOB) \cdot OC = \frac{a^2 x}{6}$.

A tetraéder felszíne $F = (AOB) + 2(AOC) + (ABC) = \frac{a^2}{2} + ax + (ABC)$.

Húzzunk a C csúcsból AB-re merőlegest, CD-t.



Nyilván $OD = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$(ABC) = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\sqrt{x^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2x^2 + a^2}.$$

Eszerint $F = \frac{a^2}{2} + ax + \frac{a}{2}\sqrt{2x^2 + a^2}$.

A feladat követelménye:

$$\frac{a^2 x}{6} = \frac{m}{3}\left(\frac{a^2}{2} + ax + \frac{a}{2}\sqrt{2x^2 + a^2}\right).$$

Az egyenlet minden tagja osztható a-val. A törtek eltávolítása és a kijelölt műveletek elvégzése után keletkezik

(1) $$(a - 2m)x - am = m\sqrt{2x^2 + a^2} \ldots$$

Négyzetre emelve mindkét oldalon és rendezve:

(2) $$\left[(a - 2m)^2 - 2m^2\right] x^2 - 2am(a - 2m)x = 0 \ldots$$

A (2) egyik gyöke: $x = 0$. Ez nem elégíti az (1)-t, mert $x = 0$ helyettesítés után $-am = am$, ellenmondás áll elő, ha $m \neq 0$.[1]

A (2) másik gyöke

(3) $$x = \frac{2am(a - 2m)}{(a - 2m)^2 - 2m^2} \ldots$$

Ez megfelel, ha pozitív *és az (1) baloldalát pozitívvá teszi. Utóbbi feltétel azonban nem teljesülhet, ha* $a - 2m$ *negatív (vagy zérus). Kell tehát, hogy* $a - 2m > 0$ *ill.* $m < \frac{a}{2}$ *legyen.*

Ha már most $a - 2m > 0$, akkor (3) szerint x pozitív, ha a nevezője

$$(a - 2m)^2 - 2m^2 = (a - 2m + m\sqrt{2})(a - 2m - m\sqrt{2}) \geq 0,$$

vagyis, mivel $\quad a - 2m + m\sqrt{2} > 0,$

kell, hogy

(4) $$a - 2m - m\sqrt{2} \leq 0, \quad \text{azaz} \quad m \leq \frac{a}{2 + \sqrt{2}} = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}) \ldots$$

legyen. Ha x értékét (3) szerint) (1) baloldalán helyettesítjük:

$$\frac{2am(a - 2m)^2}{(a - 2m)^2 - 2m^2} - am = \frac{am\left[(a - 2m)^2 + 2m^2\right]}{(a - 2m)^2 - 2m^2} > 0, \quad \text{ha} \quad m \leq \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2}).$$

Eszerint m legnagyobb értéke $m' = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$. Ez azonban az $AOB\triangle$-be írt kör sugarát jelenti. [2] Másrészt m az $AOBC$ tetraéderbe írt gömb sugarával egyenlő. Nyilvánvaló, hogy $m < m'$. Ha $m = m'$, akkor $x = \infty$; a tetraéder háromoldalú hasábos térré válik, melyet az $AOB\triangle$ határol. Ezen teret határoló lapokat érintő gömb legnagyobb köre az $AOB\triangle$-be írt körrel egybevágó.

[1] $x = 0$ esetén, $F = a^2$, azaz $AOB\triangle$ területének kétszerese. Ekkor a teraéder térfogata $= 0$, azaz $m = 0$.

[2] $\varrho = \frac{2t}{2s} = \frac{a^2}{2a + a\sqrt{2}} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$.