Az (1) gyökeit jelöljék $x_2,\ x_3$, a (2)-ét $x_3,\ x_1$, a (3)-ét $x_1,\ x_2$.
Nyilván:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 + x_3, & a_2 &= x_3 + x_1, & a_3 &= x_1 + x_2, \\ b_1 &= x_2 x_3, & b_2 &= x_3 x_1, & b_3 &= x_1 x_2. \end{aligned}$$

Már most legyen $A = x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)$.

Ekkor $\quad x_1 = A - a_1, \quad x_2 = A - a_2, \quad x_3 = A - a_3,$

és így $\quad b_1 = (A - a_2)(A - a_3), \quad b_2 = (A - a_3)(A - a_1), \quad b_3 = (A - a_1)(A - a_2).$

Tehát a szóbanforgó feltétel szükséges. Vizsgáljuk még meg, hogy elegendő-e? Tekintsük tehát az

$$x^2 - a_1 x + (A - a_2)(A - a_3) = 0 \ldots \tag{1a}$$

egyenlet gyökeit. Minthogy

$$(A - a_2) + (A - a_3) = 2A - (a_2 + a_3) = a_1 + a_2 + a_3 - (a_2 + a_3) \equiv a_1.$$

az 1a) gyökei $\qquad A - a_2 = x_2, \quad \text{és} \quad A - a_3 = x_3.$

Hasonlóan $\quad x^2 - a_2 x + (A - a_3)(A - a_1) = 0 \quad$ egyenlet gyökei

$A - a_3 = x_3 \quad \text{és} \quad A - a_1 = x_1,$

az $\quad x^2 - a_3 x + (A - a_1)(A - a_2) = 0 \quad$ egyenlet gyökei:

$A - a_1 = x_1 \quad \text{és} \quad A - a_2 = x_2.$ *Q. e. d.*

Csáki Frigyes (Bolyai g. VIII. o. Bp. V.)