Az urnában legalább egy, legfeljebb 3 golyó fehér. (4 fehér golyó esetén mindig fehéret húznánk!)

Ha az urnában csak egy golyó fehér, akkor annak valószínűsége, hogy egy húzásnál fehéret húzunk, $\frac{1}{4}$, hogy nem húzunk fehéret, $\frac{3}{4}$. Hogy $2n$ számú húzásnál éppen n-szer húzunk fehéret, annak valószínűsége [1]

$$v_1 = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n = \binom{2n}{n}\frac{3^n}{4^{2n}}.$$

Ha az urnában 2 fehér golyó van, akkor annak valószínűsége, hogy fehéret húzunk, $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, hogy nem húzunk fehéret, szintén $\frac{1}{2}$. Hogy $2n$ számú húzásnál n-szer fehéret, n-szer nem fehéret húzunk, annak valószínűsége

$$v_2 = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}.$$

Hasonlóan

$$v_3 = \binom{2n}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n\left(\frac{1}{4}\right)^n = \binom{2n}{n}\frac{3^n}{4^{2n}}.$$

Már most annak valószínűsége, hogy a második ok idézte elő az eseményt,

$$v = \frac{v_2}{v_1+v_2+v_3} = \frac{\frac{1}{4^n}}{2\frac{3^n}{4^{2n}}+\frac{1}{4^n}} = \frac{4^n}{2\cdot 3^n+4^n}.$$

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.).
Jakab Károly (VIII. o. magántanuló, Kalocsa).

Jegyzet. Könnyen igazolható, hogy v az n monoton növekvő függvénye; ugyanis

$$\frac{4^{n+1}}{2\cdot 3^{n+1}+4^{n+1}} > \frac{4^n}{2\cdot 3^n+4^n}.$$

(Az egyenlőtlenség rendezése erre vezet: $8\cdot 3^n > 2\cdot 3^{n+1}$ ill. $8>6$).

Ha $n\to\infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty} v = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}\right)^n+1} = 1$$

mert

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0.$$

Ha tehát a húzások száma igen nagy páros szám, akkor a szóbanforgó ok fennállása majdnem bizonyos.

[1] Hogy egy bizonyos sorrendben húzunk n fehéret és n nem fehéret, annak valószínűsége $\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n$. A lehetséges sorrendek száma pedig $\frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}$.