I. Megoldás. A gömböv felszíne: $F=2R\pi m$, ahol m a gömböv, ill. a megfelelő gömbréteg magassága. Minthogy F és R állandó, kell, hogy m is állandó legyen.

Állandó magasságú gömbréteg térfogata legnagyobb akkor, ha (a határoló síkokkal) párhuzamos síkmetszetek területei a legnagyobbak; ez bekövetkezik akkor, ha a gömb legnagyobb körének síkja a gömbréteg magasságát merőlegesen felezi.

II. Megoldás. A gömbréteget határoló körök sugarai r_1 és r_2. A térfogata:

$$V=\frac{1}{6}\pi m^3+\frac{1}{2}\pi m\left(r_1^2+r_2^2\right).$$

Jelölje r a határoló körök távolságát (m) merőlegesen felező síkmetszet sugarát; ekkor

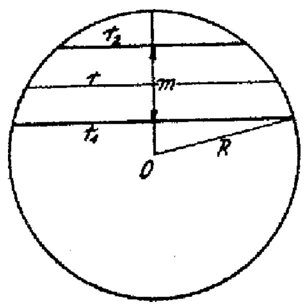
$$r_1^2+r_2^2=2r^2-\frac{1}{2}m^2.$$

V értéke legnagyobb akkor, ha $r_1^2+r_2^2$ összeg a legnagyobb; ez bekövetkezik akkor, ha $r=R$.

$$V_{\max}=\frac{1}{6}\pi m^3+\frac{1}{2}\pi m\left(2R^2-\frac{1}{2}m^2\right)=\pi mR^2-\frac{1}{12}\pi m^3.$$

Jegyzet. Ha $m=2R$, akkor ezen térfogati érték $\frac{4}{3}\pi R^3$ lesz!

III. Megoldás.



Az előbbi megoldásban láttuk, hogy a gömbréteg térfogata az $r_1^2+r_2^2$ összegtől függ. Tekintsük független változónak az r_2 sugarú síkmetszet x távolságát a rá merőleges gömbátmérő végpontjától. Az r_1 sugarú síkmetszet távolsága ugyanazon végponttól $x+m$. Eszerint, tekintettel arra, hogy r_1 ill. r_2 mértani középarányos az átmérő megfelelő két szelete között,

$$r_2^2=x(2R-x),\quad r_1^2=(x+m)\big[2R-(x+m)\big],$$
$$r_1^2+r_2^2=-2x^2+(4R-2m)x+2Rm-m^2,$$

azaz: $r_1^2+r_2^2$ az x-nek oly másodfokú függvénye, melynek maximuma van, ha

$$x=\frac{4R-2m}{4}=R-\frac{m}{2}.$$

Így

$$x+m=R+\frac{m}{2}.$$

A gömbréteget határoló síkok távolsága a gömb középpontjától egyenlő $\frac{m}{2}$-vel.

Hamza Aladár (Kegyesrendi g. VIII. o. Szeged.)