Egyenlőtlenségünk bal oldalának átalakításával keletkezik:

$$\frac{2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta+\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}} > \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\beta-\alpha}$$

vagy

$$\frac{\sin\frac{\gamma+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}} > \frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}} : \frac{\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{\frac{\gamma-\beta}{2}}\ldots \tag{2}$$

Feltételünk szerint $0<\frac{\beta+\alpha}{2}<\frac{\gamma+\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

Ebből következik, hogy a (2) bal oldala az egységnél nagyobb. Kimutatjuk, hogy a jobb oldal az egységnél kisebb. Az 1487. feladat II. megoldásában láttuk, hogy $\frac{\sin x}{x}$ a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ közben 1-től $\frac{2}{\pi}$-ig *állandóan fogy*, tehát

$$\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}<1. \quad \left[0<\frac{\beta-\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}\right].$$

Továbbá $0<\frac{\gamma-\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$ és így $\frac{\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{\frac{\gamma-\beta}{2}}>\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\pi}$.

Eszerint $\frac{8}{\pi^2}\cdot\frac{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}{\frac{\beta-\alpha}{2}}:\frac{\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{\frac{\gamma-\beta}{2}}<\frac{8}{\pi^2}\cdot 1:\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{\pi}$.[1]

A jobb oldali hányados: $\frac{8}{\pi^2}:\frac{2\sqrt{2}}{\pi}=\frac{8}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}<\frac{3}{\pi}<1$.

Ezzel tehát tételünket igazoltuk.

Bizám György (Bolyai g. VII. o. Bp. V)

[1]L. X. évfolyam — 1933/12 — 107. o. a 950. feladatban.