I. Megoldás. Ábrázoljuk az $y=\sin x$ függvényt 0 és $\frac{\pi}{2}$ között; a függvény-görbe keresztülmegy a $(0,\ 0)$, $\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$ pontokon és a szóban forgó ív alulról konkáv. A két határpontot összekötő húr a görbe íve alatt fekszik (az ív és az X tengely között), e két határpontot összekötő egyenes egyenlete $y=\frac{2}{\pi}x$.

Ha tehát a megadott intervallumban valamely x értékhez tartozó pontot keresünk a sinusgörbén, ill. a szóbanforgó húrján, akkor az előbbi ordinátája (t. i. $\sin x$) nagyobb, mint az utóbbié (t. i. $\frac{2}{\pi}x$); a határpontokban ezen ordináták egyenlők és így, ha

$$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}, \quad \text{akkor} \quad \sin x \geqq \frac{2}{\pi}x.$$

Bán Tamás (érseki g. VII. o. Bp. II.)

II. Megoldás. Vizsgáljuk az $y=\frac{\sin x}{x}$ függvény változását a $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ közben. Ezen köz határain:

$$y_1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad \text{és} \quad y_2=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Kimutatjuk. hogy a $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ közben $y=\frac{\sin x}{x}$ állandóan fogy. Ugyanis

$$y'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x^2}.$$

A $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ közben $\cos x>0$, míg $x-\operatorname{tg}x<0$, tehát $y'<0$. Eszerint az $y=\frac{\sin x}{x}$ függvény értéke a szóbanforgó közben 1-től fogy $\frac{2}{\pi}$-ig és így valóban

$$\frac{\sin x}{x} \geqq \frac{2}{\pi} \quad \text{azaz} \quad \sin x \geqq \frac{2}{\pi}x.$$

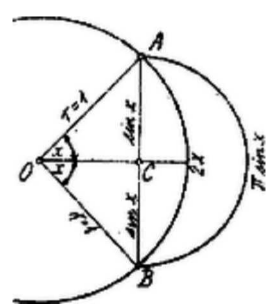
(*Q.e.d.*)

Josepovits Gyula (Könyves Kálmán g. VII o. Ujpest.)

Jegyzet. Hasonlóan vizsgálhatjuk az $y=\sin x-\frac{2}{\pi}x$ függvény változását is. Erről kiderül, hogy a $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ köz határain 0, a közben mindenütt pozitív.

(Taksony Gy.)

III. Megoldás. Az egység sugarú körben $2x$ ívhez tartozó húr hossza $2\sin x$; feltesszük, hogy $0\leqq 2x\leqq\pi$. Ezen húr felével, a húr középpontjából szerkesztett félkör hossza $\pi\sin x$.



Két ponton (A és B) átmenő körök ívei legyenek i_1, i_2. Ha i_1 középpontja a két pont távolságát merőlegesen felező egyenesen messzebb van a C felezőponttól, mint i_2-é, akkor i_1 az AB és i_2 között fekszik. Az adott esetben tehát az egységsugarú kör $2x$ íve az $\frac{1}{2}AB$ sugarú $\pi\sin x$ íven belül fekszik.

Ha azonban két pontot két állandóan konvex törtvonal köt össze, akkor ezek közül a belső rövidebb. Ugyanez áll két állandóan konvex görbe vonalra is. Ebből következik, hogy

$$\pi\sin x>2x \quad \text{ill.} \quad \sin x>\frac{2}{\pi}x.$$

Ha $x=0$, vagy $x=\frac{\pi}{2}$, akkor a két görbe ív összeesik ; ezen határesetekben tehát $\sin x=\frac{2}{\pi}x$.

Relle Ferenc (Révai Miklós g. VII. o. Győr.)