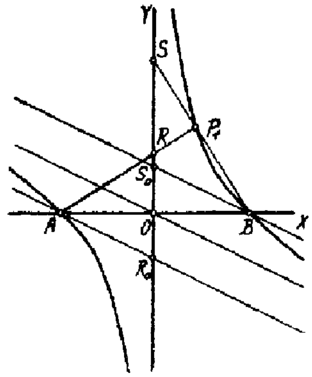
Derékszögű koordinátarendszerünk X-tengelye legyen az AB, Y-tengelye az e egyenes. Az A koordinátái $(-d,\ 0)$, a B ponté $(d,\ 0)$. A változó R pont koordinátái $(0,\ \lambda)$, az S ponté $(0,\ \lambda+d)$.



Az AR egyenes egyenlete:

$$y=\frac{\lambda}{d}(x+d)\ldots \tag{1}$$

A BS egyenes egyenlete:

$$y=-\frac{\lambda+d}{d}(x-d)\ldots \tag{2}$$

A két egyenes metszőpontjának koordinátáit két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja, mint a λ paraméter függvényeit. Ha a két egyenletből λ-t kiküszöböljük, a metszéspont koordinátái között összefüggést kapunk; ez lesz a keresett mértani hely egyenlete.
1)-ből $\lambda=\dfrac{dy}{x+d}$. Ha ezt 2)-be helyettesítjük:

$$y=-\frac{1}{d}\left(\frac{dy}{x+d}+d\right)(x-d) \quad \text{ill.} \quad (x+d)y=-(y+x+d)(x-d)\ldots \tag{3}$$

A kijelölt műveletek végrehajtása és összevonása után keletkezik:

$$x^2+2xy=d^2\ldots \tag{4}$$

Nyilvánvalóan hiperbolával van dolgunk, melynek *középpontja az origó*, keresztülmegy az A és B pontokon,[1] és aszimptotái az

$$x^2+2xy\equiv x(x+2y=0\ldots \tag{5}$$

egyenespárt alkotják. Eszerint a hiperbola egyik aszimptotája az $x=0$ egyenes, azaz az Y-tengely, a másik aszimptotája az $x+2y=0$ egyenes. (Ennek irányhatározója $-\dfrac{1}{2}$!)

Ha R az O pontban van. $(\lambda=0)$, akkor AR a BS-t a B pontban metszi. $(P\equiv B)$.

Ha S van az O pontban $(\lambda=-d)$, akkor AR és BS metszőpontja, $P\equiv A$.

Ha R a végtelenbe jut az Y-tengelyen, akkor AR és BS párhuzamosak az Y-tengellyel: P az Y-tengely végtelenben fekvő pontja.

Ha $\lambda=-\dfrac{d}{2}$, azaz O felezi az RS távolságot, akkor AR és BS párhuzamosak és irányhatározójuk: $-\dfrac{1}{2}$[2] AR és BS metszőpontja a végtelenben van oly egyenesen, melynek irányhatározója: $-\dfrac{1}{2}$.

Jelölje az R, S pontok helyzetét az utóbbi esetben $R_0\left(0,\ -\dfrac{d}{2}\right)$, $S_0\left(0,\ \dfrac{d}{2}\right)$. Ha R leírja az Y-tengelynek az R_0 feletti részét $\left(\lambda>-\dfrac{d}{2}\right)$, a P pont leírja a hiperbola azon ágát, mely az X-tengely pozitív oldalán van; ha pedig R az Y-tengelyen R_0-tól $-\infty$ felé tart, akkor a P pont leírja a hiperbola másik ágát, amely t. i. az X-tengely negatív oldalán van.

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.)

---

[1] $(-d,\ 0)$ és $(d,\ 0)$ kielégítik a (4) egyenletet!

[2] Ha $\lambda=-\dfrac{d}{2}$, akkor az (1) egyenlet átmegy ebbe: $y=-\dfrac{1}{2}(x+d)$, míg a (2) ebbe: $y=-\dfrac{1}{2}(x-d)$.

Jegyzet. a) Ha az (1) és (2) egyenletek rendszerét $x,\ y$ szerint megoldjuk:

$$x=\frac{d^2}{2\lambda+d},\quad y=2\lambda\frac{\lambda+d}{2\lambda+d}.$$

Ezen paraméteres előállításból kiolvashatók a megállapítások, amelyeket a görbe helyzetére tettünk.

b) Az aszimptoták helyzetét ismerve, megszerkeszthetjük a főtengelyeket.

c) Ha az RS távolságnak felső végpontja R, akkor a P pont az

$$x^2-2xy=d^2$$

görbét írja le. Ennek aszimptotái az $x=0$ és $x-2y=0$ egyenesek.