Állapítsuk meg a nevező zérus helyeit. $2x^4+x^2-1=0$, ha $x^2=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}$. Valós x értékeket szolgáltat

$$x^2=\frac{-1+3}{4}=\frac{1}{2},\quad \text{azaz}\quad x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sim\pm 0{,}707.$$

Eszerint a függvénynek $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ és $x_2=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ helyeken szakadása van; minden más helyen $-\infty$ és $+\infty$ között a függvény folytonos.

A függvény változásának megállapítására számítsuk ki differenciálhányadosát:

$$y'=\frac{(2x^4+x^2-1)(8x^3+16x)-(2x^4+8x^2+3)(8x^3+2x)}{(2x^4+x^2-1)^2}=$$
$$=-2x\frac{14x^4+16x^2+11}{(2x^4+x^2-1)^2}=-2xg(x).$$

$g(x)$ oly törtet jelez, mely x minden értékénél pozitív. Ugyanis a számláló x^2 másodfokú függvénye, melynek discriminánsa $16-4\cdot 14\cdot 11<0$, tehát előjele állandó és megegyezik x^4 együtthatójának előjelével. A nevező is pozitív; a fenti x_1 és x_2 helyeken eltűnik, úgy, hogy x_1 helyen $y'=+\infty$, míg x_2 helyen $y'=-\infty$.

$y'=0$ az $x=0$ helyen és itt pozitív értékekből megy át negatív értékekbe, tehát $x=0$ helyen a függvénynek maximuma van és $y_{\max}=-3$.

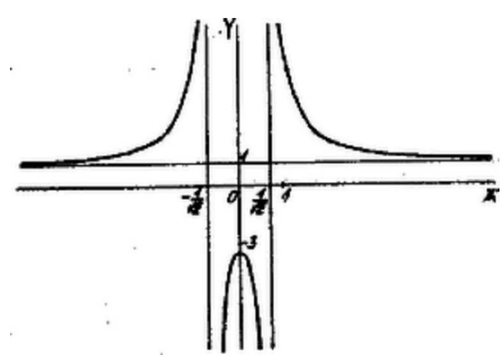
$$y'>0,\quad \text{ha}\quad x<0\quad \text{és}\quad y'<0,\quad \text{ha}\quad x>0.$$

Ha $x\to\pm\infty$, akkor $y\to 1$ és $y'=0$; az $y=1$ egyenes a görbének aszimptotája, az X-tengely mindkét oldalán.

Minthogy a függvényben x-nek csak páros kitevőjű hatványai szerepelnek, a függvény értéke $+x$ és $-x$ helyeken egyenlő: a görbe az Y tengelyre nézve szimmetrikus. A két szakadási helyen az $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ és $x=+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ egyenesek szintén aszimptoták. A görbe tehát három ágból áll.

A függvény változását feltüntető táblázat:

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'	0	$+$	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0
y	1	$\nearrow$	$+\infty\|-\infty$	$\nearrow$	-3 max	$\searrow$	$-\infty\|+\infty$	$\searrow$	1



Klein József (Izr. g. VIII. o. Debrecen.)