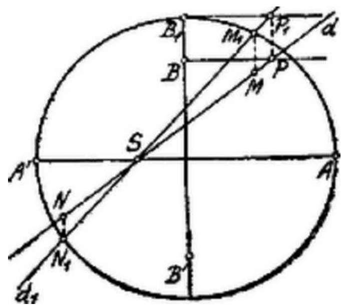
Az ellipszist, melynek főtengelyei $2a$, $2b$ (és $a > b$), mint az a sugarú kör affin transzformációját fogjuk fel. A transzformáció tengelye az ellipszis nagy tengelye, AA', karakterisztikája $\frac{a}{b}$. ($OA = a$, $OB = b$; a B pont a főkör B_1 pontjának transzformációja).



Messe a d egyenes AA'-t az S pontban. B ponton át AA'-vel párhuzamosan vont egyenes d-t a P-ben metszi. A B_1 ponton át AA'-vel párhuzamost húzunk; a P ponton át pedig erre merőleges vetítő sugarat. Ez meghatározza rajta a P_1 pontot. Már most S és P_1 pontok meghatározzák azon d_1 egyenest, melynek affin-transzformációja d. A d_1 egyenes az OA sugarú főkört az M_1 és N_1 pontokban metszi. Ezekből AA'-re merőleges vetítő sugarakat állítunk; a vetítősugarak a d egyenest a keresett M és N pontokban metszik. Ezek lesznek az ellipszis és a d egyenes metszőpontjai.

Legyen O vetülete d_1-n Q. A szerkesztés lehetséges, ha $OQ \leqq a$. Az SOQ derékszögű háromszögben: $OQ = OS \sin\alpha_1$ ha α_1 a d hajlásszöge az $A'A$ tengelyhez. Jelölje a α a d hajlásszögét az $A'A$ tengelyhez. A definíció szerint

$$\operatorname{tg}\,\alpha_1 = \operatorname{tg}\,\alpha\cdot\frac{a}{b} \quad \text{és} \quad \sin\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\,\alpha_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}}.$$

Már most

$$OS\operatorname{tg}\,\alpha_1 \leqq a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}.$$

$$OS\operatorname{tg}\,\alpha\frac{a}{b} \leqq a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\frac{a^2}{b^2}} \quad \text{és innen} \quad \overline{OS}^2 \leqq b^2\operatorname{cotg}^2\alpha + a^2.$$

Eszerint adott α hajlásszögű d egyenesre nézve a metszéspont létezésének feltétele:

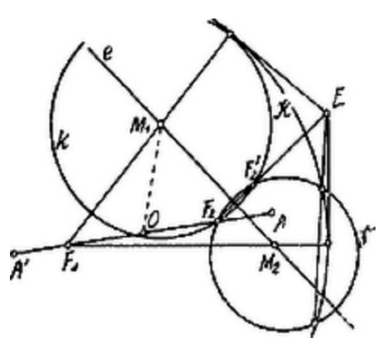
$$-\sqrt{a^2+b^2\operatorname{cotg}^2\alpha} \leqq OS \leqq \sqrt{a^2+b^2\operatorname{cotg}^2\alpha}.$$

Kovács Illés (Fazekas Mihály g. VII. o. Debrecen.).

II. Megoldás. A főtengelyek segítségével meghatározhatjuk az ellipszis gyújtópontjainak, F_1 és F_2 helyét is. Vegyük tekintetbe továbbá az ellipszis egyik K vezérkörét, melynek középpontja F_1 sugara $2a$.

Az ellipszis mértani helye azon k körök középpontjainak, amelyek az F_2-n keresztülmennek és K-t (belülről) érintik.

Feladatunk most már az, hogy oly k kört határozzunk meg, melynek középpontja az e egyenesen fekszik. Ilyen k kör keresztül megy az F_2-nek e-re vonatkozó szimmetrikus pontján, F_2' is. Így olyan k kört kell szerkesztenünk, mely két adott ponton megy keresztül, (F_2 és F_2') és a K kört érinti.



A K és a keresett k kör hatványvonala a két kör közös t érintője. A t az F_2F_2' egyenest oly E pontban metszi, melynek hatványa az F_2, F_2' pontokon átmenő bármely körre ugyanakkora, t.i. $\overline{EF_2}\cdot\overline{EF_2'}$. Szerkesszünk tehát egy tetszőleges γ kört az F_1F_2' pontokon keresztül, mely a K kört metszi: γ és K hatványvonala közös húrjukat tartó egyenes lesz és ez is az E ponton megy keresztül. Ilyen módon megkaptuk az F_2F_2' egyenes E pontját: innen a K körhöz érintőket húzunk (t_1 és t_2).

Az érintési pontokat összekötjük F_1 ponttal: az összekötő egyenesek az e-t a keresett k_1 és k_2 körök középpontjaiban metszik. Ezek, t.i. M_1 és M_2 lesznek az ellipszis és az e egyenes metszéspontjai.

Bizám György (Bolyai g. VIII. o. Bp. V.).
Hoffmann Tibor (Szent-István g. VII. o. Bp. XIV.).

Jegyzet. A szerkesztés végezhető, ha F_2' nem esik a K körön kívül. Ha F_2' a K körre esik, akkor az F_2-ből e-re állított merőleges talppontja az ellipszis O középpontjától a-távolságban lesz, azaz ezen talppont a főkörön fekszik: ekkor e az ellipszis érintője. Ezen esetben E és F_2' összeesik; F_1F_2' az e-t azon pontban metszi, amelyben e az ellipszist érinti.