Másodrendű görbe, azaz kúpszelet egyenletével van dolgunk, melyet – a kijelölt műveletek végrehajtása és rendezés után – így írhatunk:

$$f(x,y) \equiv (a^2 + a'^2)x^2 + 2(ab + a'b')xy + (b^2 + b'^2)y^2 = c^2.$$

A kúpszelet nemét eldönti a másodfokú tagok discriminánsának előjele:

$$D = 4(ab + a'b')^2 - 4(a^2 + a'^2)(b^2 + b'^2) =$$
$$= 4(2aba'b' - a^2b'^2 - a'^2b^2) = -4(ab' - a'b)^2.$$

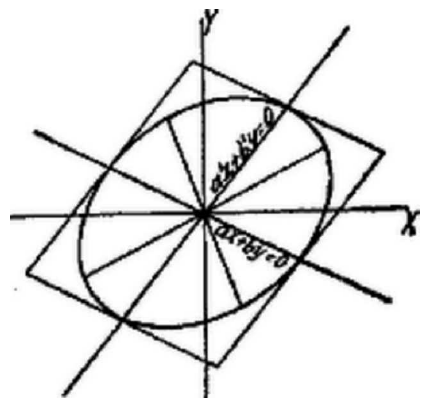
Eszerint $D \leqq 0$.

1) Ha $ab' - a'b = 0$, akkor $f(x,y)$ egy elsőfokú kifejezés négyzete; azaz egyenletünk

$$(Ax + By)^2 = c^2 \quad \text{ill.} \quad (Ax + By + c)(Ax + By - c) = 0$$

alakban írható. Két párhuzamos egyenesből álló egyenes párral van dolgunk. (Elfajuló parabola!)

2) Ha $ab' - a'b$‡0, akkor $D < 0$ és hacsak c‡0, ellipszissel van dolgunk, melynek középpontja az origo.[1]



Az ellipszis valós; ugyanis 4 pontját könnyen kijelölhetjük. T.i. az origon átmenő $ax + by = 0$, és $a'x + b'y = 0$ egyeneseken az ellipszisnek két-két pontja fekszik.

$$\text{Ha } ax + by = 0, \quad \text{akkor} \quad a'x + b'y = \pm c.$$
$$\text{Ha } a'x + b'y = 0, \quad \text{akkor} \quad ax + by = \pm c.$$

Ilyen módon négy elsőfokú egyenletrendszer 4 pontot határoz meg. Könnyen látható, hogy két-két pont az origóra nézve szimmetrikus helyzetű: az $ax + by = 0$ és $a'x + b'y = 0$ egyeneseken az ellipszis átmérői feküsznek.

Az $a'x + b'y = \pm c$ egyenesek az ellipszis párhuzamos érintői. Ugyanis, ha $a'x + b'y = \pm c$, akkor $(ax + by)^2 = 0$, azaz a szóban forgó egyeneseknek az ellipszissel két összeeső közös pontjuk van.

Az $a'x + b'y = \pm c$ érintők párhuzamosak az $a'x + b'y = 0$ egyenesen fekvő átmérővel. Hasonlóan az $ax + by = \pm c$ érintők párhuzamosak az $ax + by = 0$ átmérővel. Ebből következik, hogy

$$ax + by = 0, \quad a'x + b'y = 0$$

konjugált átmérők hordozói. Az ellipszis pedig az

$$ax + by = \pm c, \quad a'x + b'y = \pm c$$

4 egyenes által határolt síkrészben fekszik.

Ha $c = 0$; akkor az

$$(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2 = 0$$

egyenletet csak egy valós pont koordinátái, t.i. az origóé, elégítik ki. Azt is mondhatjuk, hogy ezen esetben képzetes egyenespárral van dolgunk.

[1] Ha a kúpszelet egyenletéből az elsőfokú tagok hiányoznak, a kúpszeletek középpontja az origo. Ekkor ugyanis, ha (x,y) a kúpszelet egy pontja, akkor $(-x,-y)$ is a kúpszeleten fekszik azaz a kúpszelet pontjai az origóra nézve szimmetrikus helyzetűek.