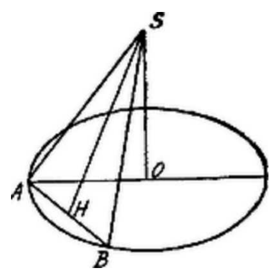
1^0 Az SAB egyenlőszárú háromszögben $SH \perp AB$ és így SH felezi AB-t. Az $SAB\triangle$ területe: $y = AH \cdot SH = x \cdot SH$.
Az SOH derékszögű háromszögben $\overline{SH}^2 = \overline{SO}^2 + \overline{OH}^2$.
Minthogy $OH \perp AB$, $\overline{OH}^2 = R^2 - x^2$ és $\overline{SH}^2 = h^2 + R^2 - x^2$.
Eszerint

$$y = x\sqrt{h^2 + R^2 - x^2} = \sqrt{(h^2 + R^2)x^2 - x^4}.$$



2^0. Vizsgálnunk kell már most y változását, ha $0 \leqq x \leqq R$. Képezzük y differenciálhányadosát:

$$y' = \frac{2(h^2 + R^2)x - 4x^3}{2\sqrt{(h^2 + R^2)x^2 - x^4}} = \frac{h^2 + R^2 - 2x^2}{\sqrt{h^2 + R^2 - x^2}}.$$

$$y' = 0, \quad \text{ha} \quad x = \sqrt{\frac{h^2 + R^2}{2}}.$$

Minthogy $x \leqq R$, $\dfrac{h^2 + R^2}{2} \leqq R^2$ és innen $h \leqq R$.
Eszerint két esetet kell megkülönböztetnünk:

a) $h \geqq R$. Ekkor y' állandóan pozitív marad, ha $0 \leqq x \leqq R$. Az y függvény állandóan növekedik 0-tól hR-ig. Ha B leírja az egész kör kerületét, y növekedik 0-tól hR-ig és azután csökken hR-től 0-ig. Eszerint $h \leqq R$ esetben $AB = 2R$ értékhez y legnagyobb értéke tartozik. Ha $h > R$, akkor a $2R$ alapú $ASB\triangle$-ben az S csúcsnál fekvő szög $< 90^\circ$, ha $h = R$, akkor $ASB\sphericalangle = 90^\circ$.

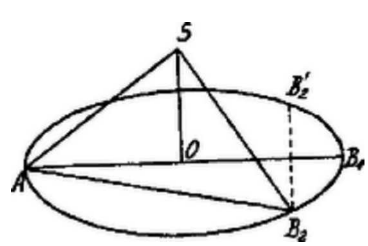
b) $h < R$. Ezen esetben y változását feltüntető táblázat:

x	0		$\sqrt{\dfrac{h^2+R^2}{2}}$		R
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	0 min	$\nearrow$	$\dfrac{h^2+R^2}{2}$ max	$\searrow$	hR min

3^0. A $h < R$ esetekben $y = 0$, ha $x = 0$, azaz B az A-ban van. $y = 0$ abszolút minimum. Ha azonban B az A-val diametrálisan szemben fekvő B_1-ben van ($x = R$), akkor az $SAB\triangle$ területe relatív minimum. Ha B azon B_2 ill. B_2' pontokban van, amelyekre nézve

$$AB_2 = AB_2' = 2\sqrt{\frac{h^2 + R^2}{2}} = \sqrt{2(h^2 + R^2)} = SA\sqrt{2},$$

akkor $SAB\triangle$ területe (relatív) maximum.



Minthogy $SB_2 = SA$ és $AB_2 = AB_2' = SA\sqrt{2}$, kell, hogy az ASB_2, ASB_2' háromszögek S-nél derékszögű (egyenlőszárú) háromszögek legyenek.

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.)

Jegyzet. Ha az $ASB\triangle$ területét

$$\frac{1}{2} SA \cdot SB \sin ASB = \frac{1}{2} \overline{SA}^2 \sin ASB$$

alakban írjuk, nyilvánvaló, hogy területe maximum, ha $ASB\sphericalangle = 90^\circ$, feltéve, hogy ez lehetséges. Lehetséges pedig akkor, ha

$$\overline{AB}^2 = 2\overline{SA}^2 = 2(h^2 + R^2).$$