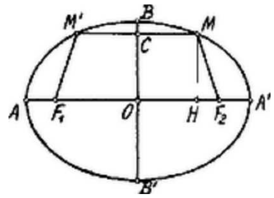
A trapéz forgásából keletkező test térfogata kétszerese az $OCMF_2$ forgásából keletkező testének. Ha M vetülete az AA' nagytengelyen H, az $OCMF_2$ forgási testje az $OCMH$ téglalap forgásából keletkező hengerből és az $MHF_2\triangle$ forgási kúpjából tehető össze.

A henger térfogata $v_1 = \pi \cdot \overline{MH^2} \cdot \overline{OH}$.



Itt $OH = CM = x$ $(0 \leq x \leq a)$ és MH az M pont ordinátája, mely az elipszisnek

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

egyenletéből fejezhető ki:

$$\overline{MH^2} = y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2).$$

A kúp térfogata: $v_2 = \dfrac{1}{3}\pi\overline{MH^2} \cdot HF$

$$HF_2 = OF_2 - OH = c - x \gtreqless 0, \qquad v_2 = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)(c - x).$$

A trapéz forgásából keletkező test térfogata

$$v = 2(v_1 + v_2) = 2\pi\overline{MH^2}\left(OH + \frac{HF_2}{3}\right) = 2\pi\frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2)\left(x + \frac{c - x}{3}\right) =$$
$$= 2\pi\frac{a^2 - c^2}{3a^2}(a^2 - x^2)(2x + c).$$

Ha $\quad x = 0, \quad v_0 = \dfrac{2\pi}{3a^2}(a^2 - c^2)a^2c = \dfrac{2\pi c}{3}(a^2 - c^2).$

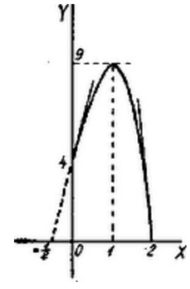
Ha $\quad x = a, \quad v = 0$. Már most v differenciálhányadosa

$$v' = \frac{2\pi}{3a^2}(a^2 - c^2)\left[-2x(2x + c) + 2(a^2 - x^2)\right] = -\frac{4\pi}{3a^2}(a^2 - c^2)(3x^2 + cx - a^2)$$

$v' = 0$, ha $3x^2 + cx - a^2 = 0$. Ezzen egyenletnek valós, ellenkező[1] előjelű gyökei vannak; ezek közül csak a pozitív felel meg, t. i.

$$x_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 12a^2}}{6}.$$

Ezen helyen a $3x^2 + cx - a^2$ függvény negatív értékekből megy át pozitívekbe, tehát v' pozitívból negatívba és így v-nek maximuma van ezen helyen $x = a$ helyen $v' < 0$.



v értékének változását egy harmadfokú parabolának azon íve tünteti fel, mely $x = 0$ és $x = a$ között van. v változását jellemző táblázat:

[1] $3x^2 + cx - a^2$ értéke $-a^2$, ha $x = 0$; ha pedig $x = a$, értéke $2a^2 + ac > 0$. Tehát 0 és a között van az egyenlet egyik gyöke. A másik gyöke negatív.

x	0		x_1		a
v'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
v	v_0	$\nearrow$	v max	$\searrow$	0

$$V_{\max} = \frac{\pi(a^2 - c^2)}{81a^2}\left[(36a^2 - c^2)c + (12a^2 + c^2)\sqrt{12a^2 + c^2}\right].$$

Baán Sándor (Bencés g. VII. o. Kőszeg)