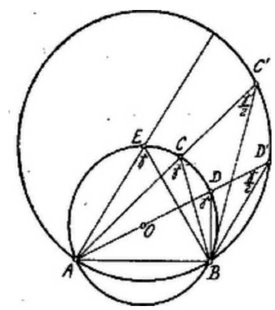
I. Megoldás. 1°. A háromszög vagy hegyesszögű vagy derékszögű; első esetben a körülírt kör középpontja a háromszögön belül, második esetben a háromszög kerületén (az átfogón) fekszik.

Legyen $ABC\triangle$ az R sugarú körbe írt hegyes szögű háromszög. Hosszabbítsuk meg pl. az AC oldalt és mérjük fel a meghosszabbításra a $CC' = BC$ távolságot. Ha $ACB\sphericalangle = \gamma$, akkor nyilván $AC'B\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2}$.



Tegyük fel, hogy $\overline{AC} > \overline{BC}$. Ezen esetben húzzuk meg az A csúcsból kiinduló AD átmérőt és ennek meghosszabbítására mérjük fel a $DD' = DB$ távolságot Minthogy $ADB\sphericalangle = \gamma$, azért $AD'B\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2}$.

Eszerint C' és D' oly kör kerületén feküsznek, melyben az AB húrhoz $\dfrac{\gamma}{2}$ kerületi szög tartozik. Ezen kör középpontja az $\widehat{AB}$ ív E felezőpontja (amelyre $AEB\sphericalangle = \gamma$). Minthogy $ABC\triangle$ hegyesszögű, AC az AE és AD között fekszik, azaz AC' az E középpontú (és EA sugarú) körben oly húr, mely közelebb van az E középponthoz, mint e kör AD' húrja, tehát

$$AC + CC' > AD + DD',$$
$$AC' + BC > AD + BD,$$
$$AB + AC + BC > AB + AD + BD.$$

Azonban az ABD derékszögű háromszögben

$$AB + BD > AD = 2R$$

és így
$$AB + AC + BC > 2AD = 4R.$$

A háromszög kerülete akkor lesz $4R$, ha két oldala egy átmérőben esik össze.

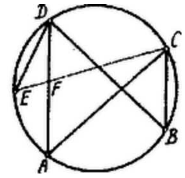
2°. Ha a körbe írt konvex sokszög tartalmazza a kör középpontját (vagy a belsejében vagy a kerületén), akkor a sokszöget egy csúcsból kiinduló átlókkal háromszögekre bontjuk. Ezek egyikének tartalmaznia kell a kör középpontját. Erre a háromszögre pedig érvényes e tétel, tehát érvényes a sokszögre is, mert ennek kerülete nagyobb az előbb kiemelt háromszögénél.

Jegyzet. Ha az R sugarú körben mindazon hegyesszögű háromszögeket vizsgáljuk, melyeknek AB oldala szilárd húr, ezeknek kerületét az ADB derékszögű háromszög kerületével hasonlítjuk össze. Azon háromszögek harmadik csúcsa, melyeknek AB alapjuk szilárd és kerületük: $AB + AD + BD$, oly ellipszisen mozog, melynek gyújtópontjai A és B, nagy tengelye $AD + BD$. Ezen ellipszisnek a körhöz való helyzetéből következik, hogy ha C a körön fekszik úgy, hogy $ACB\sphericalangle$ hegyesszögű, akkor C az ellipszisen kívül fekszik, tehát

$$AC + BC > AD + BD.$$

II. Megoldás. Felhasználjuk a következő segédtételt:
Ha a kört az A, B, C, D pontokkal négy részre osztjuk úgy, hogy $\widehat{AD} > \widehat{BC}$ legyen, akkor

$$\overline{AD} + \overline{BD} > \overline{AC} + \overline{BC}.$$



Ugyanis feltevésünk szerint az $\widehat{AD}$ íven van olyan E pont, amelyre $\widehat{DE}=\widehat{BC}$, tehát $\overline{DE}=\overline{BC}$ és így $\overline{BD}=\overline{CE}$. Ha már most az $\overline{AD}$ és $\overline{CE}$ húrok metszéspontja F, akkor

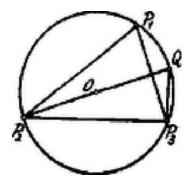
$$\overline{AF}+\overline{CF}>\overline{AC} \quad \text{és} \quad \overline{DF}+\overline{EF}>\overline{DE}.$$

E két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összegezve

$$\overline{AD}+\overline{CE}>\overline{AC}+\overline{DE}$$

vagy

$$\overline{AD}+\overline{BD}>\overline{AC}+\overline{BC}\ldots \quad Q.e.d.$$



Legyen már most $P_1P_2P_3$ olyan beírt háromszög, amelynek belsejében van a kör O középpontja és pl. $\overline{P_1P_2}\geq P_1P_3$. Ekkor $\widehat{P_1P_2}\geq\widehat{P_1P_3}$. Ha P_2O a kört másodszor Q-ban metszi, még inkább áll: $\widehat{P_1P_2}>\widehat{QP_3}$. Segédtételünk szerint:

$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_1P_3}>\overline{QP_2}+\overline{QP_3}$$

tehát

$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_1P_3}>\overline{QP_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{QP_3}>2\overline{QP_2}=4R.$$

Ha O a háromszög kerületére esik, vagyis az egyik oldal átmérő (mint a $QP_2P_3\triangle$-ben), akkor közvetlenül látható, hogy a háromszög kerülete nagyobb az átmérő kétszeresénél.

Jegyzet. Ezen bizonyítás független a háromszög szögeinek összegére vonatkozó (euklidesi) tételtől.

III. Megoldás. Jelöljék az R sugara körbe írt háromszög oldalait a, b, c, megfelelő szögeit α, β, γ. Ismeretes, hogy

$$a=2R\sin\alpha, \qquad b=2R\sin\beta, \qquad c=2R\sin\gamma.$$

Így tehát $\qquad a+b+c=2R(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma).$

A háromszög szögeinek sinusai pozitív, egységnél nem nagyobb számok, úgy, hogy $\sin\alpha\geq\sin^2\alpha$ s í. t., de

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma.$$

Azonban $\qquad \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

Ha a háromszög hegyesszögű vagy derékszögű, a cosinusok egyike sem negatív, tehát

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\geq 2.$$

(Az egyenlőség jele akkor áll elő, ha az egyik szög derékszög!)
Eszerint

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>2$$

és $\qquad a+b+c>4R.$

Bizám György (Bolyai g. VII. o. Bp. V.)