Tegyük fel, hogy $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ az $y^2 = 2px$ parabolának oly két pontja, amelyekhez tartozó érintők irányhatározói m_1 és m_2 kielégítik az

$$m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2 = m_1 m_2 (m_1 + m_2) = k \ldots \tag{1}$$

összefüggést.

Az M_1 pontra nézve $m_1 = \dfrac{p}{y_1}$, M_2-re $m_2 = \dfrac{p}{y_2}$. Helyettesítve ezeket 1)-be:

$$\frac{p^3(y_1 + y_2)}{y_1^2 y_2^2} = k \ldots \tag{2}$$

Az 1446. feladatban láttuk, hogy a parabola M_1 és M_2 pontjaiban húzott érintők oly $P(x, y)$ pontban metszik egymást, amelyre nézve

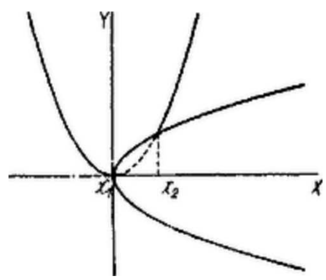
$$2y = y_1 + y_2 \qquad \text{és} \qquad x^2 = x_1 x_2 \ldots \tag{3}$$

Eszerint 2)-ből

$$\frac{p^3(y_1 + y_2)}{2px_1 \cdot 2px_2} = \frac{2p^3 y}{4p^2 x^2} = k \quad \text{és így} \quad x^2 = \frac{p}{2k} y \ldots \tag{4}$$

azaz a P pont, amelyből húzható érintők irányhatározói kielégítik az 1) egyenletet a 4) parabolán fekszik; ennek tengelye az Y tengely, csúcsa az origo és paramétere $\dfrac{p}{4k}$.

Ha $p > 0$, akkor az $y^2 = 2px$ parabola az X-tengely, és ha még $k > 0$, az $x^2 = \dfrac{p}{2k} y$ parabola az Y-tengely pozitív oldalán fekszik.



Utóbbi parabolának vannak pontjai, amelyek az előbbin belül feküsznek. A két parabola közös pontjainak koordinátái az

$$y^2 = 2px, \quad x^2 = \frac{p}{2k} y$$

egyenletrendszert elégítik ki. Küszöböljük ki y-t: $y = \dfrac{2k}{p} x^2$ kifejezést helyettesítsük a másik egyenletbe; az így keletkező $\dfrac{4k^2}{p^2} x^4 - 2px = 0$ megoldásai: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{p}{\sqrt[3]{2k^2}}$. (A másik két gyök komplex szám.)

Eszerint a két görbe közös pontjai az x_1 és x_2 abscisszákhoz tartoznak. A 4) alatti parabola azon pontjaiból, melyek x_1 és x_2 között feküsznek, nem lehet az adott parabolához érintőket húzni. Ezek tehát nem tartoznak a P pont mértani helyéhez.

A P pont mértani helye a 4) alatti parabola azon részei, amelyekre nézve

$$x < 0 \qquad \text{ill.} \qquad x > \frac{p}{\sqrt[3]{2k^2}}.$$

Máté Imre (Ciszterci Szent-István g. VIII. o. Székesfehérvár.)