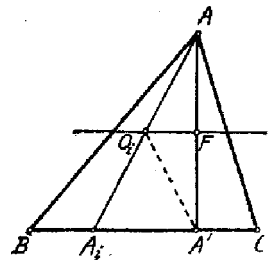
Az $ABC\triangle$ A csúcsából kiinduló AA_i transzverzális derékszög alatt látszik a transzverzális, mint átmérő fölé írt gömbfelület minden pontjából (és csakis ezekből). Ezen gömb keresztülmegy az A ponton és az A pontból húzott magasság A' talppontján, mert $AA'A_i\sphericalangle = 90°$. A gömb középpontja az AA' magasságot merőlegesen felező egyenesen fekszik. Ebből következik, hogy valamennyi ilyen gömb átmegy az AA', mint átmérő fölött, a háromszög síkjára merőleges Σ_1 síkban rajzolt körön.



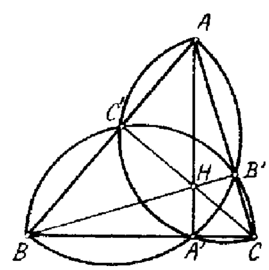
Ha ezen kör egy pontja P, az AA_i-hez tartozó gömb középpontja O_i, és AA' magasság felező pontja – a szóbanforgó kör középpontja – F, akkor $O_iFP \cong O_iFA\triangle$ $(\cong O_iFA'\triangle)$. T. i. $O_iF = O_iF$, $FP - FA(= FA')$ és $OF \perp \Sigma_1$, azaz $O_iFP\sphericalangle = O_iFA\sphericalangle(= O_iFA'\sphericalangle) = 90°$.

Ebből következik, hogy $O_iP = O_iA(-O_iA')$ tehát a Σ_1 síkban fekvő kör minden pontja az O_i középpont körül $O_iA\left(= \dfrac{1}{2}AA_i\right)$ sugárral leírt gömb felületen fekszik.

Eszerint az AA' magasság, mint átmérő fölött a Σ_1 síkban leírt k_a kör bármely pontjából bármely AA_i transzverzális derékszög alatt látszik.

Hasonlóan a BB_j transzverzálisok a BB' magasság, mint átmérő fölött, az $ABC\triangle$ síkjára merőleges Σ_2 síkban leírt k_b kör, a CC_l transzverzálisok a CC' magasság, mint átmérő fölött, az $ABC\triangle$ síkjára merőleges Σ_3 síkban leírt k_c kör pontjaiból látszanak derékszög alatt.

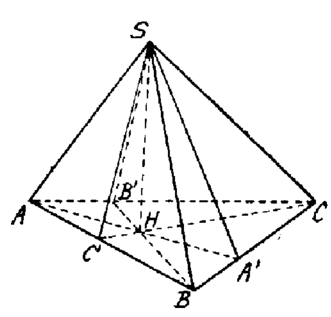
Ha az $ABC\triangle$ hegyesszögű, akkor a háromszög H magassági pontja a háromszögön belül fekszik. Kimutatjuk, hogy ebben az esetben a k_a, k_b, k_c körök az ABC sík fölött (vagy alatt) egy S pontban metszik egymást.



A H pontban az $ABC\triangle$ síkjára emelt HZ merőleges a Σ_1, Σ_2, Σ_3 síkok közös egyenese. HZ egyenes a k_a, k_b, k_c kört messe rendre a P_a, P_b, P_c pontban.

Minthogy AP_aA', BP_bB', CP_cC' háromszögek a P_a, P_b, P_c csúcsoknál derékszögűek és ezekben HP_a, HP_b, HP_c az átfogóhoz tartozó magasságok,

$$\overline{HP}_a^2 = \overline{AH}\cdot\overline{HA'}, \quad \overline{HP}_b^2 = \overline{BH}\cdot\overline{HB'}, \quad \overline{HP}_c^2 = \overline{CH}\cdot\overline{HC'}$$



Azonban az $ABC\triangle$ síkjában az AB, BC, CA oldalak, mint átmérők fölött írt körök párjainak hatványvonalai a magasságok és így a magassági pont hatványa mindegyik körére nézve ugyanakkora, azaz

$$AH\cdot HA' = \overline{BH}\cdot\overline{HB'} = \overline{CH}\cdot\overline{HC'}$$

és így

$$HP_a = HP_b = HP_c, \quad \text{ill.} \quad P_a \equiv P_b \equiv P_c \equiv S.$$

Ebből az S pontból az $ABC\triangle$ bármely transzverzálisa derékszög alatt látszik.

Ha a háromszög derékszögű, pl. A-nál, akkor a k_a, k_b, k_c körök az A pontban érintik egymást. Az A csúcsból a BB_j és CC_l transzverzálisok derékszög alatt látszanak, míg az AA_i transzverzálisok 0^0-ú szög alatt.

Ha $ABC\triangle$ tompaszögű, pl. A-nál, akkor a k_a kör az $ABC\triangle$-et belül hasítja, a k_b és k_c körök a háromszögön kívül hasítják a háromszög síkját, tehát közös pontjuk nem lehet.

Volena-Koczor Imre (Révai Miklós g. VII. o. Győr).