I. Megoldás. Ha $n>1$ és a baloldali összegben $\frac{1}{n+1}$-től kezdve minden nevező helyébe a nála nagyobb n^2-t tesszük, akkor mindegyik tört értéke kisebb lesz és így

$$f(n)\equiv\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}.$$

Minthogy az $\frac{1}{n}$-t követő tagok száma n^2-n,

$$f(n)>\frac{1}{n}+\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n},$$
$$f(n)>1.$$

Gantner Jenő (Szent-István g. VII. o. Bp. XIV.).

II. Megoldás. $f(2)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$, mert $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$.

$$f(3)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{9}>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{9}$$
$$f(3)>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{9}>\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$

azaz $$f(3)>f(2).$$

Kimutatjuk általában, hogy $f(n+1)>f(n)$.

Ugyanis $$f(n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$$

$$f(n+1)=\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}\right)+\left[\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}\right]=$$
$$=f(n)-\frac{1}{n}+\left[\frac{1}{n^2+1}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}\right].$$

A szögletes zárójelben foglalt összeget kisebbítjük, ha minden tagjában a legnagyobb nevezőt, $(n+1)^2$-t vesszük; a tagok száma pedig $(n-+1)^2-n^2$. Eszerint

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}>\frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2}=\frac{2n+1}{(n+1)^2}.$$

Ezen kisebbítéssel azonban még mindig $\frac{1}{n}$-nél többet kapunk, ha $n>1$. T. i.

$$\frac{2n+1}{(n+1)^2}>\frac{1}{n},\quad \text{ill.}\quad 2n^2+n>n^2+2n+1,\quad \text{mert}\quad n(n-1)>1,$$

ha $n>1$.Tehát

$$f(n+1)>f(n)-\frac{1}{n}+\frac{1}{n},\quad \text{azaz}\quad f(n+1)>f(n).$$

Kimondhatjuk tehát, hogy $f(n)$ az n-nel monoton növekedő; mivel $f(2)>1$, egyszersmind $f(n)>1$.

Taksony György (Ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

III. Megoldás. Bontsuk az $f(n)$ összeg azon részét, mely $\frac{1}{n}$-t követi, részletösszegekre; ezek mindegyikét kisebbítjük, ha mindegyik helyébe a legkisebbiket (utolsót) vesszük. Ezen részletösszegek mindegyikében a tagok száma n, Tehát:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}>n\frac{1}{3n}=\frac{1}{3}$$
$$\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\ldots+\frac{1}{4n-1}+\frac{1}{4n}>n\frac{1}{4n}=\frac{1}{4}$$
$$\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{(n-1)n+1}+\frac{1}{(n-1)n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2-1}+\frac{1}{n^2}>n\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

Eszerint

$$f(n)>\frac{1}{n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}>n\frac{1}{n}=1.$$

Haraszthy András (Szent László g. VI. o. Bp. X.)