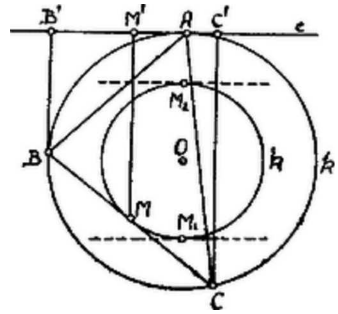
Az A pontban húzott e érintőn a B csúcs vetülete legyen B', a C csúcsé C', a BC oldalt felező M ponté M'.

A BC oldal forgásából keletkező vetület *általában* csonka kúp palástja. Ennek felszíne

$$F = \pi(\overline{BB'} + \overline{CC'}) \cdot \overline{BC} = 2\pi \overline{MM'} \cdot \overline{BC}.$$



Vizsgálatunknál elsősorban a háromszög $BC = a$ oldala *állandónak* tekintendő. Ha $BC = a$, az r sugarú kör állandó hosszúságú húrja, akkor ennek M felezőpontja az adott k körrel koncentrikus kört ír le. A k' körnek az e érintőre merőleges átmérője a k' kört oly M_1, M_2 pontokban metszi, melyek közül az M_1 az e-től legtávolabb, M_2 a legközelebb van.

Ha már most a $BC = a$ oldallal szemben hegyes szög fekszik, $\alpha < 90^\circ$, akkor $\overline{MM'}$ és így F legnagyobb értéke akkor áll elő, ha M az M_1-ben van és $M_1' \equiv A$. Ekkor az $ABC\Delta$ egyenlőszárú és

$$F_{\max} = 2\pi \cdot M_1A \cdot BC = \pi \cdot a^2 \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

Ha a $BC = a$ oldallal szemben tompaszög fekszik, ez $180^\circ - \alpha$; akkor MM'-nek és így F-nek is minimuma áll elő, ha $M \equiv M_2$ és így $M_2' \equiv A$. Az $ABC\Delta$ egyenlőszárú és most

$$F_{\min} = 2\pi \cdot M_2A \cdot BC \cdot \pi a^2 \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.$$ [1]

A forgási felület a két határesetben hengerpalást. [2]

Ha pedig $\alpha = 90^\circ$, ekkor $a = 2r$; az a oldal felezőpontja mindenkor a kör O középpontja és $MM' \equiv OA = r$,

$$F = 2\pi \cdot r \cdot 2r = 4r^2\pi,$$

azaz ekkor a felszín állandó.

Amint látjuk, a forgási felület maximumáról állandó $BC = a$ esetén akkor lehet szó, ha ABC olyan egyenlőszárú háromszög, amelynek az alappal szemben hegyes szöge van. Jelölje T ezen háromszög területét, akkor

$$F_{\max} = 2\pi \cdot M_1A \cdot BC = 4\pi T.$$

A körbeírt egyenlőszárú háromszögek között azonban az egyenlőoldalú háromszögé a legnagyobb; ennek értéke $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$. Eszerint

$$\max(F_{\max}) = 4\pi \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\pi\sqrt{3}.$$

Ezen forgási felszínt akkor kapjuk, ha A a körbe írt egyenlő oldalú háromszög egyik csúcsa.

Jakab Károly (VIII. o. magántanuló, Kalocsa.)

Jegyzet: Ha az a hosszúságú húr α kerületi szöghöz tartozik, akkor $a = = 2r\sin\alpha$ és

$$F_{\max} = \pi a^2 \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2} = 4\pi r^2 \sin^2\alpha\, \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2} = 16\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}.$$

Legyen $\frac{\alpha}{2} = x$ és vizsgáljuk az

$$y = \sin x \cos^3 x$$

[1] Ha $\alpha < 90^\circ$, $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$ és $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} < \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}$.

[2] BC mindenkor a k' kör érintője. Ha B (vagy C) az A-ba esik, akkor a forgásfelület kúp palástja lesz és ennek felszíne: $\pi a^2 \sin\alpha$. Könnyen igazolható, hogy ha $\alpha < 90^\circ$, akkor

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} < \sin\alpha < \mathrm{cotg}\,\frac{\alpha}{2}.$$

függvény változását, ha $0 < x < 45°$. Első differenciálhányadosa

$$y' = \cos^4 x - 3\sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x(\cos^2 x - 3\sin^2 x) = 0,$$

1) ha $\cos^2 x = 3\sin^2 x$ azaz $\mathrm{cotg}^2 x = 3$. Ekkor $x = \dfrac{\alpha}{2} = 30°$, $\alpha = 60°$;

2) ha $\cos^2 x = 0$, $x = \dfrac{\alpha}{2} = 90°$, $\alpha = 180°$. Ezt az esetet kizártuk!

A 2) eset azt jelentené, hogy az $ABC\Delta$ az A pontba zsugorodik össze és $F = 0$.

Az 1) esetben y' az $x = \dfrac{\pi}{6}$ helyen pozitív értékekből megy át negatív értékekbe; itt y-nak maximuma van. Ezen esetben az $ABC\Delta$ egyenlőoldalú és

$$\max(F_{\max}) = 16\pi r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = 3\sqrt{3}\pi r^2.$$