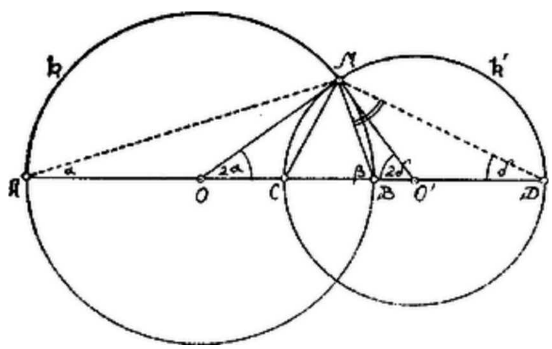
**I. Megoldás.** Szerkesszük meg azon $P$ pontok mértani helyét, amelyekre nézve $\dfrac{AP}{BP} = m$, állandó. Ezen mértani hely kör, mely az $AB$ egyenest két pontban metszi: $C$ és $D$-ben. Ha $C$ $A$ és $B$ között van, akkor $D$ az $AB$ szeleten kívül és $B$-hez közelebb van, ha $m > 1$.

Az $AB$ átmérő fölött szerkesztett kört jelölje $k$, a $CD$ átmérőhöz tartozó kör $k'$. (Ezen $k'$ a szóbanforgó mértani hely.) $k$ középpontja legyen $O$, $k'$-é $O'$. A két kör egyik metszéspontja legyen $M$. Be kell bizonyítanunk, hogy $OM \perp O'M$. Az $MAB\sphericalangle = \alpha$, $MBA\sphericalangle = \beta$ és (Thales tételével) $AMB\sphericalangle = 90°$; így $\alpha + \beta = 90°$.




A $k$ körben $MOB\sphericalangle$ középponti szög az $\alpha$ kerületi szög kétszerese: $MOB\sphericalangle = 2\alpha$.

A $k'$ körben $MO'B\sphericalangle = 2\delta$.

Minthogy $\beta$ az $MDB\Delta$ külső szöge, $MD$ pedig az $AMB\Delta$ $M$ csúcsánál fekvő külső szöget felezi [1] és ezen külső szög $90°$-ú, $\delta = \beta - 45°$

Eszerint

$$MOO'\sphericalangle + MO'O\sphericalangle = MOB\sphericalangle + MO'B\sphericalangle = 2\alpha + 2\delta =$$
$$= 2\alpha + 2\beta - 90° = 2(\alpha+\beta) - 90° = 90°.$$

Ebből következik, hogy $OMO'\sphericalangle = 90°$, azaz $OM \perp O'M$.

*Jegyzet:* E megoldások túlnyomó részben azt mutatták ki, hogy $\overline{OO'}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{O'M}^2$.

**II. Megoldás.** Az $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$ egyenlőség írható így is:

$$\frac{AO+OC}{AO-OC} = \frac{AO+OD}{OD-AO}.$$

Ebből keletkezik:

$$\overline{AO}^2 = AC \cdot AD.$$

Minthogy

$$AO = OM, \qquad \overline{OM}^2 = \overline{AC} \cdot AD.$$

Ez azt jelenti, hogy $OM$ a $CD$ átmérőjű $k'$ kört érinti az $M$ pontban. Hasonlóan mutatható ki, hogy $O'M$ a $k$ kört érinti az $M$ pontban. Tehát $OM \perp OM'$.

*Taksony György* (Ág. ev. g. VIII. o. Bp.)

[1] $MC$ belső szögfelező, mert $AC : BC = AM : BM$; felezi az $AMB\sphericalangle = 90°$=ot és $MD \perp MC$.