I. Megoldás. Az M pont távolsága az AB-től legyen $MP = y$, az AT-től $MQ = AP = x$. Nyilván $y = \sqrt{x(2R-x)}$, ha $AB = 2R$.

Meg kell oldanunk az

$$x + y = l \ldots \tag{1}$$

$$y^2 = x(2R-x) \ldots \tag{2}$$

egyenletekből álló rendszert. (1)-ből $y = l - x$; helyettesítsük ezt (2)-be. Kellő rendezés után keletkezik

$$f(x) \equiv 2x^2 - 2(l+R)x + l^2 = 0 \ldots \tag{3}$$

Ezen egyenlet gyöke megfelel a feladatnak, ha valós, pozitív és l-nél kisebb, $2R$-nél nem nagyobb. ($l > 0$!)

A (3) gyökei valósak, ha

$$(l+R)^2 - 2l^2 \geq 0, \quad (l+R) > l\sqrt{2} \quad \text{vagy} \quad R \geq l(\sqrt{2}-1).$$

Utóbbi egyenlőtlenség mindkét tagját szorozzuk $(\sqrt{2}+1)$-vel, keletkezik

$$l \leq R(\sqrt{2}+1) \ldots \tag{4}$$

Vizsgáljuk most a (4) feltételt kielégítve, a (3) gyökeinek helyzetét 0, l és $2R$-hez viszonyítva. Megjegyezhetjük, hogy ha a gyökök valósak, mind a kettő pozitív.

$$f(0) = l^2 > 0, \quad f(2R) = (l-2R)^2 > 0, \quad f(l) = -l(2R-l).$$

1°. Ha $l < 2R$, akkor $f(l) < 0$. A (3) egyenletnek egyik gyöke 0 és l között van, a másik l és $2R$ között. Az előbbi megfelel, utóbbi nem felel meg. Egy megoldás!

2°. Ha $l = 2R$, akkor $f(2R) = 0$. Az egyenlet egyik gyöke $2R$, a másik R. Mindkettő megfelel!

3°. Ha $2R < l \leq R(\sqrt{2}+1)$, akkor $f(0)$ és $f(l)$ egyenlő előjelűek. Mind a két gyök 0 és l között van, mert a gyökök összegének fele: $\dfrac{l+R}{2} < l$; ugyanis $R < \dfrac{l}{2}$.

Ezen esetben tehát mind a két gyök megfelel.

$l = R(\sqrt{2}+1)$ határesetben a két gyök egyenlő.

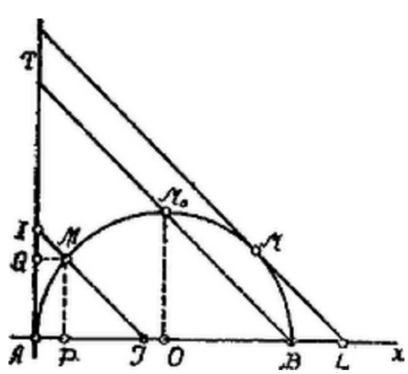
Általában:

$$x_{1,2} = \frac{l + R \pm \sqrt{(l+R)^2 - 2l^2}}{2}.$$

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp. V.)

II. Megoldás. Az előbbi eredményeket világítsuk meg geometriai szemlélettel.

$x + y = l$ oly IJ egyenes egyenlete, mely az $AB \equiv X$ tengelyről és az $AT \equiv Y$ tengelyről l hosszúságú darabokat vág le e tengelyek pozitív oldalán. Ezen oldalon fekszik az adott kör is, melynek egyenlete: $x^2 + y^2 = 2Rx$.



Ha ábránk szerint $AI = AJ = l$, az IJ egyenes keresztülmegy a kör M pontján, mely az $X-$tengely felett fekszik. ($AIJ\sphericalangle = AJI\sphericalangle = 45°$).

Toljuk el az IJ egyenest önmagával párhuzamosan, amíg a kört az M' pontban érinti: ezen érintő lesz az IJ egyenesek határhelyzete. Ezen határhelyzetben az X tengelyt az L pontban metszi és $AL = AO + OL = R + R\sqrt{2} = R(\sqrt{2}+1)$.

Ha $l < 2R$, azaz J az A és B között fekszik, az IJ egyenes a kört egy pontban metszi az X-tengely felett.

$l = 2R$ esetben már két M pontról lehet szó: az egyik a B, a másik az M_0, mely az AB félkört felezi.

Ha $l > 2R$, de J a B és L között, akkor az IJ két pontban metszi a kört, az X-tengely felett.

$l = AL = R(\sqrt{2}+1)$ esetben az IJ egyenes az M' pontban érinti a kört. $\left(M' \text{ abscissája}: \ R + \dfrac{l-R}{2} = \dfrac{l+R}{2}\right)$.

Ha $l > AL$, akkor a feltételeknek megfelelő M pont nem létezik: az egyenes nem metszi a kört.

Lőke Endre (Premontrei g. VII. o. Keszthely)