1^0. A parabola egyenlete legyen $y^2 = 2px$. (Derékszögű koordinátarendszerünk abscissatengelye a parabola főtengelye, kezdőpontja a parabola csúcsa.)

A parabola valamely T pontjának koordinátái legyenek – átmenetileg – (ξ, η). Ezen pontban az érintő iránytényezője: $\dfrac{p}{\eta}$ és az érintő egyenlete

$$y - \eta = \frac{p}{\eta}(x - \xi), \quad \text{ill.} \quad \eta y - px + p\xi - \eta^2 = 0 \ldots \tag{1}$$

Minthogy $\eta^2 = 2p\xi$, $\xi = \dfrac{\eta^2}{2p}$, az (1) egyenletből keletkezik:

$$2\eta y - 2px - \eta^2 = 0 \ldots \tag{2}$$

Ha ezen érintő keresztülmegy a $P(a, b)$ ponton, akkor

$$2\eta b - 2pa - \eta^2 = 0 \ldots \tag{3}$$

Megfordítva, az (a, b) pontból a parabolához húzott érintők érintőpontjainak ordinátái kielégítik a (3) egyenletet; ha már most η helyett y-t írunk, akkor a T_1, és T_2 pontok ordinátái, y_1 és y_2, az

$$y^2 - 2by + 2pa = 0 \ldots \tag{4}$$

egyenlet gyökei és így

$$y_1 + y_2 = 2b, \qquad \text{azaz} \qquad b = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ez annyit jelent, hogy a P pont távolsága a parabola tengelyétől a T_1 és T_2 pontok ugyanezen tengelytől való távolságainak számtani középarányosa.

2^0. A P pontnak a csúcsérintőtől, azaz az Y-tengelytől való távolsága a, a T_1 és T_2 pontoknak távolsága a csúcsérintőtől x_1 és x_2.

(4)-ből $2by = y^2 + 2pa$ vagy $4b^2y^2 = y^4 + 4pay^2 + 4p^2a^2$.

A parabola T_1 és T_2 pontjaira nézve $y^2 = 2px$, tehát

$$8b^2px = 4p^2x^2 + 8p^2ax + 4p^2a^2$$

ill.

$$px^2 + 2(ap - b^2)x + pa^2 = 0 \ldots \tag{5}$$

Az (5) egyenlet gyökei, a T_1 és T_2 pontok abscissái. Nyilván

$$x_1x_2 = \frac{pa^2}{p} \quad \text{ill.} \quad a = \sqrt{x_1x_2} \ldots$$

Q.e.d.

3^0. A P pont távolsága az F gyújtóponttól $\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ legyen d. Nyilván

$$\overline{PF^2} = d^2 = \left(a - \frac{p}{2}\right)^2 + b^2. \tag{6}$$

A parabola T pontjának távolsága a gyújtóponttól ugyanakkora, mint a directrixtől való távolsága, t. i. $x + \dfrac{p}{2}$.

Már most a T_1 és T_2 pontokra nézve:

$$\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = x_1x_2 + \frac{p}{2}(x_1 + x_2) + \frac{p^2}{4} \ldots \tag{7}$$

(5)-ből $\qquad x_1x_2 = a^2,\ x_1 + x_2 = \dfrac{2(b^2 - ap)}{p}.$

$$\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = a^2 + \frac{2(b^2 - ap)}{p} \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} = a^2 - ap + \frac{p^2}{4} + b^2 =$$

$$= \left(a - \frac{p}{2}\right)^2 + b^2 \ldots \tag{8}$$

Valóban:

$$\overline{PF^2} = d^2 = \left(x_1 + \frac{p}{2}\right)\left(x_2 + \frac{p}{2}\right) = \overline{T_1F} \cdot \overline{T_2F}.$$

Klein József (Izr. g. VIII. o. Debrecen).

Jegyzet. Az 1^0. alatti tétel azonos a következővel: a parabola azon átmérője, amely a P ponton megy keresztül, felezi a T_1T_2 húrt, ha T_1 és T_2 a P-ből húzható érintők érintési pontjai. T_1T_2 egyenes a P pontnak a parabolára vonatkozó polárisa. (Minthogy a parabola bármely átmérője párhuzamos a parabola tengelyével, az átmérőn fekvő bármely pont ordinátája egyenlő a T_1T_2 húrt felező pont ordinátájával; ez azonban a T_1 és T_2 ordinátáinak számtani közepe.)