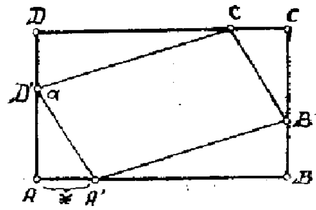


1^0. Legyen $\widehat{A'D'C'} = \alpha$. Ábránk szerint

$$\alpha = \pi - (\widehat{AD'A'} + \widehat{C'D'D}).$$
$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(\widehat{AD'A'} + \widehat{C'D'D}) =$$
$$= -\frac{\operatorname{tg} AD'A' + \operatorname{tg} C'D'D}{1 - \operatorname{tg} AD'A' \cdot \operatorname{tg} C'D'D}.$$

Azonban
$$\operatorname{tg}\widehat{AD'A'} = \frac{AA'}{AD'} = \frac{x}{3a-x},\ \operatorname{tg}\widehat{C'D'D} = \frac{C'D}{DD'} = \frac{5a-x}{x}.$$

Helyettesítve:
$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\dfrac{x}{3a-x} + \dfrac{5a-x}{x}}{1 - \dfrac{5a-x}{3a-x}} = \frac{2x^2 - 8ax + 15a^2}{2ax}.$$

$\operatorname{tg}\alpha$ kifejezésében a számláló x-nek oly másodfokú függvénye, melynek dis-criminánsa negatív. Az ilyen másodfokú függvény állandó előjelű, x^2 együtthatójának előjelével megegyező, tehát az adott esetben x minden értékénél pozitív. [1]. A nevező is pozitív. Eszerint $\operatorname{tg}\alpha$ pozitív. α hegyes szög.

A parallelogramma a téglalapon belül marad; következik ebből, hogy

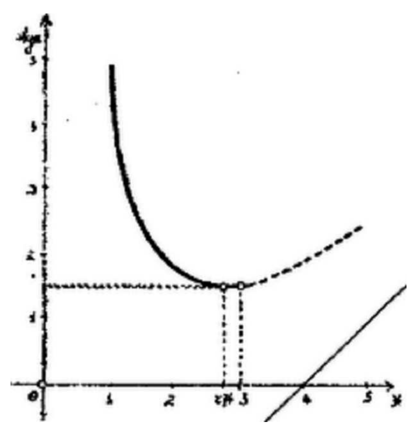
$$0 \leqq x \leqq 3a.$$

$x = 0$ mellett $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. A parallelogramma összeesik a téglalappal. $x = 3a$ mellett $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{2}$.

$\operatorname{tg}\alpha$ differenciálhányadosa:

$$\frac{d\operatorname{tg}\alpha}{dx} = \frac{(4x-8a)2ax - 2a(2x^2 - 8ax + 15a^2)}{4a^2x^2} = \frac{2x^2 - 15a^2}{2ax^2}.$$

Ez negatív, ha $0 \leqq x < a\sqrt{\dfrac{15}{2}}$, pozitív, ha $x > a\sqrt{\dfrac{15}{2}}$ és eltűnik, ha $x = a\sqrt{\dfrac{15}{2}}$. Eszerint az $x = a\sqrt{\dfrac{15}{2}} \sim 2{,}74a$ helyen $\operatorname{tg}\alpha$-nak minimuma van és ezen minimum: $\sqrt{30} - 4 \sim 1{,}48$.



A függvény változását jellemző táblázat:

[1] $2x^2 - 8ax + 15a^2 = 2(x-2a)^2 + 7a^2 > 0$ az x minden értékénél!

x	0		2,74a		$3a$
$(\operatorname{tg}\alpha)'$	$-\infty$	$-$	0	$+$	
$\operatorname{tg}\alpha$	∞	$\searrow$	1,48a	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$

Írjuk $\operatorname{tg}\alpha$ értékét a köv. alakban:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a} - 4 + \frac{15a}{x}.$$

Innen kiolvashatjuk, hogy $\operatorname{tg}\alpha$ változását ábrázoló görbének egyik aszimptotája az Y-tengely, a másik az $y = \frac{x}{a} - 4$ egyenes, amelyhez a görbe közeledik, ha $x \to \infty$. A görbének az $x = 0$ és $x = 3a$ közötti darabja ábrázolja $\operatorname{tg}\alpha$ változását. (A görbe egy hiperbola íve!)

2^0. Az $AA'D'$ és $CC'B'$ háromszögek egybevágók; területük egyenlő és közös értékük

$$\frac{AA' \cdot AD'}{2} = \frac{x(3a-x)}{2}.$$

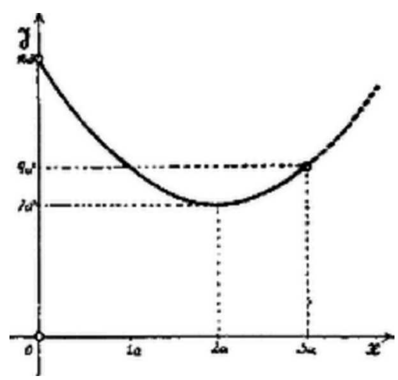
Hasonlóan a $BB'A'$ és $DD'C'$ háromszögek mindegyikének területe

$$\frac{BB' \cdot A'B}{2} = \frac{x(5a-x)}{2}.$$

A parallelogramma területét megkapjuk, ha a téglalap területéből kivonjuk a négy derékszögű háromszög területét:

$$y = 3a \cdot 5a - x(3a-x) - x(5a-x) = 2x^2 - 8ax + 15a^2.$$

$x = 0$ mellett $y = 15a^2$ (a téglalap területe).
$x = 3a$ mellett $y = 9a^2$.
A területfüggvénynek minimuma van, ha $x = 2a$ és $y_{\min} = 7a^2$.



A terület változását egy parabolának íve tünteti fel; ezen ív $x = 0$ és $x = 3a$ között fekszik.

Ebből a változásból kitűnik, hogy ha $y = k^2$, akkor a

$$2x^2 - 8ax + 15a^2 = k^2$$

egyenletnek csak akkor van megoldása, ha $7a^2 \leqq k^2 \leqq 15a^2$, [2]
még pedig két megoldása van, ha $7a^2 < k^2 \leqq 9a^2$,
egy megoldása van, ha $9a^2 < k^2 \leqq 15a^2$.
$k^2 = 7a^2$ mellett az egyenletnek két összeeső megoldása van.

Hoffmann Tibor (Szent István g. VII. o. Bp. XIV.)

[2] $k^2 = 15a^2$ esetben $2x^2 - 8ax = 0$ egyenlet egyik gyöke $x_1 = 0$, a másik gyöke $x_2 = 4a$. Utóbbi esetben a parallelogramma nem fekszik a téglalapon belül.