I. Megoldás A triéder csúcsa legyen egy gömb középpontja. A triéder a gömbön oly gömbháromszöget határoz meg, melynek oldalai a triéder élszögeivel, szögei a triéder lapszögeivel egyenlők. Jelöljék α, β, γ a gömbháromszög oldalait és x az α-val szemben fekvő szögét; akkor

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos x.$$

Ha $\beta = \gamma = \alpha$, akkor $\cos\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos x$,
ill.

$$\cos\alpha = \cos^2\alpha + (1-\cos^2\alpha)\cos x,$$

és innen

$$\cos x = \frac{\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}.$$

$\alpha = 0,\ \cos\alpha = 1$ esetet kizárjuk és így

$$\cos x = \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Ha $\alpha < \dfrac{\pi}{2},\ \cos\alpha > 0,\ \cos x < \cos\alpha$ és $x > \alpha$.

Ha $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha = 0$ és $\cos x = 0$, tehát $x = \dfrac{\pi}{2}$: derékszögű triéderrel van dolgunk.

Ha $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha < 0,\ \ 0 < 1+\cos\alpha < 1,\ \ \cos x < 0,$ de $|\cos x| > |\cos\alpha|$ és így $x > \alpha$. (Úgy α, mint x tompaszögek!)

$\alpha + x = \dfrac{\pi}{2}$ esetben $\cos x = \sin\alpha$. Ekkor

$$\sin\alpha(1+\cos\alpha) = \cos\alpha \quad \text{ill.} \quad \sin\alpha\cos\alpha = \cos\alpha - \sin\alpha.$$

Négyzetreemelve: $(\sin\alpha\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha$
azaz

$$\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha - 4 = 0.$$

Innen

$$\sin 2\alpha = 2(-1+\sqrt{2}).$$

Az egyenletnek negatív gyöke abszolut értékre > 1, nem vehető figyelembe.

A táblából kikeresve: $2\alpha = 55°56'15''$, $\alpha = 27°58'7{,}5''$
és

$$x = 90° - \alpha = 62°1'52{,}5''.$$

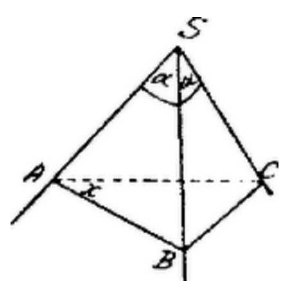
Ugyanazon sinusa van az $55°56'15''$ kiegészítő szögének is; azonban ez t. i. $180° - 55°56'15''$ nem felelhet meg, mert ekkor $2\alpha > \dfrac{\pi}{2}$, $\alpha > \dfrac{\pi}{4}$ és $x = \dfrac{\pi}{2} - \alpha < \dfrac{\pi}{4} < \alpha$ lenne, holott kell, hogy $x > \alpha$ legyen!

Bizám György (Bólyai g. VI. o. Bp. V.)

II. Megoldás. A triéder egyik élén felvett A pontban állítsunk az SA élre merőleges síkot; ez a másik két élt a B és C pontokban metszi. Minthogy SAB és SAC az A-nál derékszögű, egybevágó háromszögek,[1] $SB = SC$ és $AB = AC$. Az $SAB\triangle$-ből: $AB = SB\sin\alpha$.

A BSC egyenlőszárú háromszögből:

$$BC = 2SB\sin\frac{\alpha}{2}.$$



A BAC egyenlőszárú háromszögben $BAC\sphericalangle = x$, tehát

$$BC = 2AB\sin\frac{x}{2} = 2SB\sin\alpha\sin\frac{x}{2}.$$

Ezek szerint $2SB\sin\dfrac{\alpha}{2} = 2SB\sin\alpha\sin\dfrac{x}{2}$,
azaz

$$\sin\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha\sin\frac{x}{2}.\ ^{2}$$

[1] Egy oldal és a rajtafekvő két szög egyenlő!

[2] Ebből kiolvasható, hogy $\sin\dfrac{\alpha}{2} \leqq \sin\dfrac{x}{2}$, tehát $\alpha \leqq x$. $\left(\sin\alpha > 0,\ \sin\dfrac{\alpha}{2} > 0,\ \sin\dfrac{x}{2} > 0.\right)$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{x}{2} \quad \text{ill.} \quad 2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{x}{2} = 1.$$

Négyzetreemelve:

$$4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{x}{2} = 1.$$

Azonban $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$, $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$,

és így $\qquad (1+\cos\alpha)(1-\cos x) = 1, \quad$ ill. $\quad \cos x = \dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$