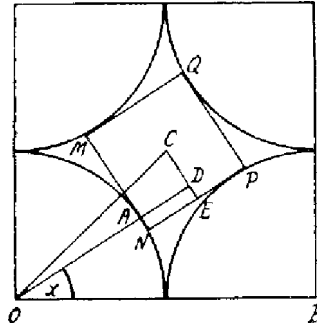


Az $OB = 2a$ oldalú négyzet C középpontjából állítsunk merőlegest az $MNPQ$ érintő-négyzet NP oldalára, ill. az ezzel párhuzamos OD -re, mely az OB -vel a $DOB = x$ szöveget zárja be és meghatározza az $MNPQ$ négyzet oldalainak irányát. Eszerint $OD \perp MN$, tehát OD az MN oldal A érintési pontján megy keresztül; $OA = a$. A C pont az $MNPQ$ négyzetnek is középpontja; ezért CD az NP -t az E pontban felezi. Jelölje y a beírt négyzet oldalát:

$$y = NP = 2NE = 2AD = 2(OD - OA).$$



Mint ahogy $COB = \frac{\pi}{4}$, azért $COD = \pm \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, és az OCD derékszögű háromszögből

$$OD = OC \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = a\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right).¹$$

$$\begin{aligned} y &= 2 \left[a\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - a \right] = \\ &= 2a \left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1 \right]. \end{aligned}$$

A négyzet területe:

$$y^2 = 4a^2 \left[\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 1 \right]^2,$$

ahol

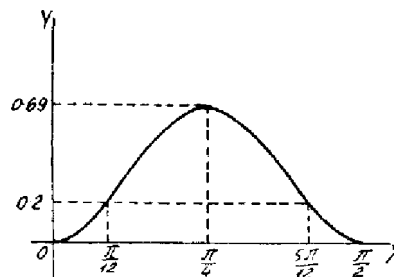
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ha $x = 0$, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és $y^2 = 0$.

$x = \frac{\pi}{2}$ mellett szintén $y^2 = 0$.

Ha x növekedik, $\frac{\pi}{4} - x$ csökken, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ növekedik mindaddig, amíg $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$, tehát $\frac{\pi}{4} - x = 0$ azaz $x = \frac{\pi}{4}$ lesz.

Ha x tovább növekedik, $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ csökken és ugyanazon értékeket veszi fel $\frac{\pi}{4}$ és $\frac{\pi}{2}$ között, mint 0 és $\frac{\pi}{4}$ között.



Hasonlóan a négyzet területe is 0-tól növekedik egy maximumig és ennek értéke:

$$y_{max}^2 = 4a^2(\sqrt{2} - 1)^2 = 4a^2(3 - 2\sqrt{2}) \sim 0,686a^2.$$

¹ $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Ezen értéket akkor éri el, midőn $x = \frac{\pi}{4}$, tehát amidőn a beírt négyzet oldalai az OB oldalú négyzet átlóival párhuzamosak.

Ha x tovább növekedik $\frac{\pi}{4}$ -től $\frac{\pi}{2}$ -ig, a beírt négyzet területe ugyanazon értékeken keresztül csökken vissza 0-ig.

Freud Géza (Berzsenyi g. VI. o. Bp. V.).