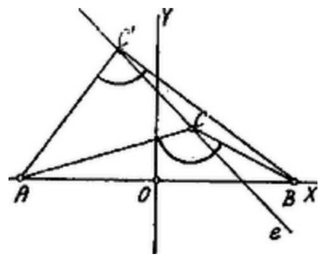
1^0. Vizsgálatunkból kizárjuk azon esetet, amidőn az e egyenes ($y = 10 - x$) az X tengelyt A és B között metszi, vagy ezek egyikén megy keresztül. Ha ezen esetekben a C az X tengelyen van, akkor $ACB\sphericalangle = 180°$, és ha C az e egyenesen tovább mozog, – bármelyik irányban –, az $ACB\sphericalangle$ folyton csökken, és zérussá válik, ha C az e egyenesen a végtelenbe kerül.



Csakis azon esetet vizsgáljuk, amidőn A és B az e egyenes ugyanazon oldalán feküsznek; határesetben e keresztülmegy az adott pontok egyikén. Az A koordinátái legyenek $(-a, 0)$, a B ponté $(a, 0)$, ahol $0 \leqq a \leqq 10$.

Az $y = 10 - x$ egyenes az X-tengelyt a K $(10,\ 0)$, az Y-tengelyt az $L(0,\ 10)$ pontban metszi.

Az $ACB\sphericalangle = \gamma$ legnagyobb akkor, ha az $ABC\triangle$ köré írt kör az e egyenest a C pontban érinti.

Keresni kell tehát azon kört, mely az A, B pontokon megy keresztül és az e egyenest érinti.

Az A, B pontokon átmenő kör középpontja az Y-tengelyen fekszik; koordinátái: $(0,\ \eta)$. Az ilyen kör egyenlete:

$$x^2 + (y-\eta)^2 = a^2 + \eta^2$$

vagyis[1]

$$x^2 + y^2 - 2\eta y - a^2 = 0 \ldots \tag{1}$$

Ezen kör érinti az $y = 10 - x$ egyenest, ha két összeeső közös pontja van. A közös pontok abscissáira nézve

$$x^2 + (10-x)^2 - 2(10-x)\eta - a^2 = 0,$$

$$\text{ill} \qquad 2x^2 + (2y - 20)x + 100 - 20\eta - a^2 = 0 \ldots \tag{2}$$

A körnek és az egyenesnek két összeeső közös pontjuk van, ha a (2) gyökei egyenlők, azaz ha a (2) driscriminánsa eltűnik:

$$D \equiv (2y-20)^2 - 8(100 - 20\eta - a^2) = 0.$$

Rendezve és egyszerűsítve:

$$\eta^2 + 20\eta + 2a^2 - 100 = 0 \ldots \tag{3}$$

(3)-ból

$$\eta = -10 \pm \sqrt{2(100 - a^2)}.$$

$(0,\ \eta)$ oly kör középpontja, mely keresztülmegy az A, B pontokon és az e egyenest érinti. Ilyen tehát, a megadott értéke mellett kettő van. Az érintési pont abscissáját pedig a 2) kétszeres gyöke jelenti; az érintési pontra nézve tehát

$$x = -\frac{2\eta - 20}{2} = \frac{10-\eta}{2} \quad \text{és} \quad y = 10 - x = \frac{10+\eta}{2}.$$

A (3) gyökei valósak, ha $100 - a^2 > 0$, azaz $0 \leqq a \leqq 10$, mert a nem lehet negatív (L. bevezetésünkben!)

Ha $2a^2 - 100 < 0$, vagyis $0 < a < 5\sqrt{2}$, akkor a (3) gyökei ellenkező előjelűek: az egyik kör középpontja az X-tengely felett van, a másik az X-tengely alatt.

Ha $a = 5\sqrt{2}$, a 3) egyik gyöke zérus, a másik: -20.

Ha $5\sqrt{2} < a < 10$, akkor a (3) mind a két gyöke negatív: mind a két kör középpontja az X-tengely alatt van.

Ha $a = 10$, akkor a (3)-nak két egyenlő gyöke van: ekkor a B pont összeesik C-vel, $\eta = -10$ és $\gamma = 180°$.

Ha pedig $a = 0$, azaz A és B az O pontban esnek össze, mindegyik kör érinti az e egyenest a C, ill. C' pontban, az X-tengelyt az O pontban és ekkor 3)-ból: $\eta^2 + 20\eta - 100 = 0$, tehát $\eta = -10(1 \pm \sqrt{2})$.

Ezen két érték η-ra nézve felső és alsó határt jelent: [2] az X-tengely feletti kör középpontjának távolsága az X-tengelytől legfeljebb $-10(1-\sqrt{2})$, az X-tengely alatti kör középpontjának távolsága az X-tengelytől legfeljebb

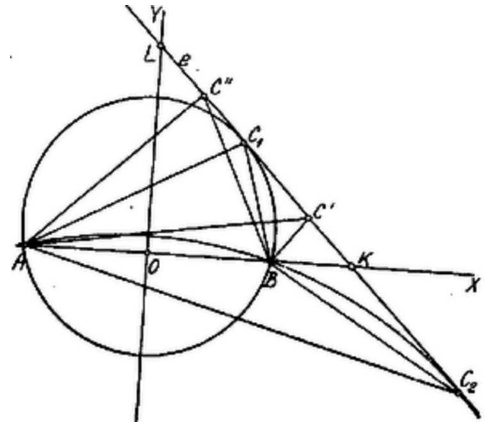
$$|-10(1+\sqrt{2})| = 10(1+\sqrt{2}).$$

[1] A kör keresztülmegy a $(a,\ 0)$ ponton, tehát $a^2 + \eta^2 = r^2$.

[2] Ugyanis általában $\eta = -10 \pm \sqrt{2(100-a^2)}$

$\eta_1 = -10 + \sqrt{2(100-a^2)}$ legnagyobb értéke akkor áll elő, ha $a = 0$.

$\eta_2 = -10 - \sqrt{2(100-a^2)}$ abszolut értéke legnagyobb, ha $a = 0$.



Jegyzet. 1°. Legyen pl. $r^2 = 28$.
Ekkor

$$\eta^2 + 20\eta - 44 = 0$$

és

$$\eta_1 = 2, \quad \eta_2 = -22.$$

Az érintési pontra nézve, ha $\eta = 2$, (2) szerint $2x^2 - 16x + 32 = 0$, ill. $(x-4)^2 = 0$, $x = 4$; $y = 6$.
Ha pedig $\eta = -22$, akkor (2) szerint

$$2x^2 - 64x + 512 = 0,$$

ill.

$$(x-16)^2 = 0,$$

tehát

$$x = 16, \quad y = -6.$$

2^0. Ha az A, B pontokon átmenő kör az e' egyenest a C pontban érinti, akkor – K pont hatványa e körre vonatkoztatva –

$$\overline{KC}^2 = \overline{KA} \cdot \overline{KB} = (10-a)(10+a) = 100 - a^2.$$

Eszerint KC értéke változik 0-tól 10-ig. Ezen változással kapcsolatos vizsgálatok az előbbiekkel megegyező eredményre vezetnek.

A KC az e egyenesen felrakható két irányban K-ból kiindulva, és így jutunk a két körhöz, szerkesztéssel is.