1^0. Valamely függvény állandóan növekedő, ha differenciálhányadosa az x minden értékénél pozitív.

$$y' = \frac{(4x-5a)(x-2a)-(2x^2-5ax+8)}{(x-2a)^2} = \frac{2}{(x-2a)^2}[(x-2a)^2+a^2-4]$$

A y' nevezője pozitív; ezért előjele csak a számláló, vagyis az

$$f(x) \equiv (x-2a)^2+a^2-4$$

másodfokú függvény előjelétől függ. Amint látjuk $f(x)$ az x minden értékénél pozitív, ha $a^2-4>0$, azaz

$$\text{ha} \quad a<-2 \quad \text{vagy ha} \quad a>+2.$$

Ezen esetekben az $f(x)=0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei. Az y függvény állandóan növekedik. Az $x=2a$ helyen szakadása van oly módon, hogy itt $y=\pm\infty$.

2^0. Ha $-2<a<+2$, akkor az $f(x)$ másodfokú függvény előjelet változtat azon x helyeken, ahol $f(x)=0$. Ha ezen helyek x' és x'', úgy hogy $x'<x''$, akkor $f(x)$ az x' helyen pozitív értékekből megy át negatív értékekbe;[1] ezért itt y-nak maximuma van.

Az x'' helyen $f(x)$ negatív értékekből megy át pozitív értékekbe, tehát itt y-nak minimuma van.

3^0. Az előzőkből látjuk, hogy $a_1=-2$ és $a_2=+2$ azon értékek, amelyek elválasztják egymástól az 1°. alatti a értékeket a 2°. alattiaktól. Ha $a_1=-2$ és $x+4\neq 0$, akkor

$$y = \frac{2x^2+10x+8}{x+4} = \frac{2(x+4)(x+1)}{x+4} = 2(x+1).$$

$a=+2$ mellett, ha $x-4\neq 0$, $y=\dfrac{2x^2-10x+8}{x-4}=\dfrac{2(x-4)(x-1)}{x-4}=2(x-1)$.[2]

4^0. Nyilvánvaló, hogy az y függvénynek hiperbola felel meg. Ha az osztást elvégezzük,

$$y = 2x-a+\frac{8-2a^2}{x-2a}.$$

Innen kiolvashatjuk, hogy az

$$x=2a \quad \text{és} \quad y=2x-a$$

egyenesek a C görbe aszimptotái. E két egyenes metszőpontjának – a görbe középpontjának – koordinátái:

$$x=2a, \quad y=3a$$

Az a kiküszöbölésével a középpont koordinátái között

$$y=\frac{3x}{2}$$

összefüggés áll elő; ez oly egyenes egyenlete, mely az origon megy keresztül. Ezen egyenest írja le a C hiperbola középpontja, ha a felveszi az összes lehetséges értékeket.

5^0. A C görbe egyenletét, a nevező eltávolítása után

$$2x^2-xy+8=a(5x-2y)$$

alakra hozhatjuk. Ha $5x-2y=0$, akkor a minden értéke mellett

$$2x^2-\frac{5}{2}x\cdot x+8\equiv 8-\frac{x^2}{2}=0, \quad \text{vagyis} \quad x=\pm 4 \quad \text{és így} \quad y=\pm\frac{5}{2}\cdot 4=\pm 10.$$

Tehát az összes görbék keresztülmennek a

$$P_1(4,10), \quad P_2(-4,-10)$$

szilárd pontokon.

Freud Géza (Berzsenyi Dániel g. VI. o. Bp. V.)

Jegyzet. Ha pl. $a=-2$, akkor az $x=-4$, $y=2x+2$ egyenesek párjával van dolgunk. Az $(x=-4,\ y=-10)$ ponton az $x=-4$ egyenes, az $(x=4,\ y=10)$ ponton az $y=2x+2$ megy keresztül.

---

[1] Ugyanis $f(x)$ az x-nek oly másodfokú függvénye, amelyben x^2 együtthatója pozitív.

[2] $y=\dfrac{2x^2-5ax+8}{x-2a}$ írható $2x^2-xy-5ax+2ay+8=0$ alakban. Ha pl. $a=-2$, akkor $2x^2+(10-y)x+8-4y\equiv(x+4)(2x+2-y)=0$. Az egyenespár két egyenese: $x+4=0$ és $y=2x+2$.