A gyökmennyiségeket mint 3 hatványait írjuk fel; az egyenlő alapú hatványok szorzatában a közös alapot (3) a kitevők összegére emeljük. Így keletkezik az

$$S_{n-1}=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\frac{4}{3^5}+\ldots+\frac{n-1}{3^n}$$

összeg. Már most

$$\frac{1}{3}S_{n-1}=\frac{1}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{4}{3^6}+\ldots+\frac{n-2}{3^n}+\frac{n-1}{3^{n+1}}.$$

A két egyenlet megfelelő tagjait kivonva:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}S_{n-1}&=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{n}{3^{n+1}}\\ 2S_{n-1}&=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^n}.\end{aligned}$$

A jobboldalon álló első n tag mértani sort alkot, amelynek hányadosa $\frac{1}{3}$. Ha már most $n\to\infty$, akkor

$$2\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{2}-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{2},$$

mert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0.$$

Ugyanis az

$$\frac{1}{3},\ \frac{2}{3^2},\ \frac{3}{3^3},\ \ldots\frac{10}{3^{10}},\ \ldots\frac{n}{3^n}$$

sorozat tagjai folyton kisebbednek, úgy, hogy ha n elég nagy, akkor $\frac{n}{3^n}$ értéke bármely kis számnál kisebb.

Eszerint

$$\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\frac{1}{4}.$$

A gyökmennyiségek szorzatának határértéke: $3^{\frac{1}{4}\cdot}=\sqrt[4]{3}$.

Szlovák István (Vörösmarthy g. V. o. Bp. VIII.)