Ha a keresett szám x, akkor a feladat szerint

$$x^3 - x^2 = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c < 10^6$$
$$x^3 - x^2 = 1001(100a + 10b + c)$$
$$x^2(x-1) = 7 \cdot 11 \cdot 13y, \quad \text{ha t.i.} \quad y = 100a + 10b + c.$$

x csak kétjegyű szám lehet; ha ugyanis

$$x = 101, \quad \text{akkor} \quad x^2(x-1) = 101^2 \cdot 100 > 100^3 = 10^6$$

$x = 100$, akkor $x^2(x-1) = 990{,}000$, nem felel meg a követelménynek (mert nem $\overline{abcabc}$ alakú)! Tehát $x < 99$.

Másrészt pedig $\overline{abcabc}$ alakú szám legkisebb értéke 100100
azaz

$$x^2(x-1) \geqq 100100$$

és így

$$x^3 > 100100, \quad \text{ill,} \quad x > \sqrt[3]{100100}.$$

Minthogy

$$46 < \sqrt[3]{100100} < 47, \quad \text{azért} \quad x \geqq 47.$$

Eszerint x oly kétjegyű szám, mely 47 és 99 között van; továbbá kell, hogy az $x^2(x-1)$ szorzat osztható legyen a 7, 11, 13 törzsszámok szorzatával, tehát vagy x vagy $x-1$ osztható ezen törzsszámok valamelyikével, ill. a belőlük alkotható szorzatokkal. Vizsgáljuk már most a lehetséges eseteket.

1. Ha x csak 7-tel osztható, akkor kell, hogy $x-1$ a $11 \cdot 13$ szorzattal legyen osztható. Ekkor azonban $x > 100$; ezen esetet ki kell zárnunk.

2. x csak 11-gyel osztható. Ekkor kell, hogy $x-1$ osztható legyen $7 \cdot 13 = 91$-gyel; mivel $x < 100$, $x - 1 = 91$ lenne és $x = 92$. Ez azonban nem többszöröse 11-nek és így ezen eset sem jöhet figyelembe!

3. x csak 13-mal osztható; ekkor $x-1$ osztható $7 \cdot 11 = 77$-tel. Minthogy $x < 100$, csak $x - 1 = 77$ lehetséges és így $x = 78$. Ez valóban megfelel, mert $x = 78$ többszöröse 13-nak[1] és

$$78^3 - 78^2 = 468468,$$

azaz *abcabc* alakú szám.

4. x osztható $7 \cdot 11$ szorzattal. Ekkor $x = 77$, $x - 1 = 76$. Utóbbi nem többszöröse 13-nak. Nem felel meg!

5. x osztható $7 \cdot 13$ szorzattal. Ekkor $x = 91$, $x - 1 = 90$. Ez sem felel meg, mert 90 nem többszöröse 13-nak.

6. x nem lehet $11 \cdot 13$ és így $7 \cdot 11 \cdot 13$ többszöröse sem, mert $x < 100$.

Kimerítettük az összes lehetséges eseteket és amint látjuk, a feladatnak csak egy megoldása van: $x = 78$.

Ozoróczy Gyula (Verbőczy g. VI. o. Bp. I.)

[1] $78^2 \cdot 77 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot y$; innen $13y = 78^2 = 6^2 \cdot 13^2$, $y = 6^2 \cdot 13 = 468$.