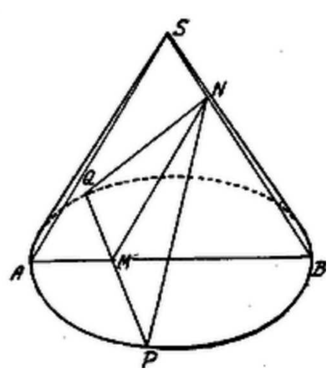



$1^0$. Minthogy $BMN\triangle \sim BAS\triangle$, $MN : AS = BM : BA$,
$MN = \dfrac{AS \cdot BM}{BA} = \dfrac{a(2R-x)}{2R}$. Az $APB\triangle$ $P$-nél derékszögű:

$$\overline{MP^2} = AM \cdot MB = x(2R-x).$$

Feltételi egyenletünk: $MN + MP = l$, tehát

$$\frac{a(2R-x)}{2R} + \sqrt{x(2R-x)} = l,$$

ill.

(1) $$2R\sqrt{x(2R-x)} - 2R(l-a) + ax \dots$$

1) baloldala pozitív (határesetben zérus); kell tehát, hogy jobboldala is ilyen legyen, azaz $x \geqq \dfrac{2R(a-l)}{a}$. Természetesen $x \leqq 2R$.

1) mindkét oldalán emeljünk négyzetre és azután rendezzünk; keletkezik:

(2) $$f(x) \equiv \left(a^2+4R^2\right)x^2 - 4R\left(2R^2+a^2-al\right)x + 4R^2\left(l^2-2al+a^2\right) = 0 \dots$$

Innen

(3) $$x = \frac{2R}{a^2+4R^2}\left(2R^2+a^2-al+2R\sqrt{R^2+al-l^2}\right) \dots$$

A gyökök valósak, ha $l^2 - al - R^2 \leq 0$; ez bekövetkezik, ha

(4) $$\frac{a-\sqrt{a^2+4R^2}}{2} < l \leqq \frac{a+\sqrt{a^2+4R^2}}{2}, \quad \text{ill.} \quad 0 < l \leqq \frac{a+\sqrt{a^2+4R^2}}{2} \dots$$

minthogy $l$ csak pozitív lehet.

Szükséges továbbá, hogy a 2) gyökei pozitívok legyenek,
$f(0) = 4R^2(l-a)^2 \geq 0$[1]. Ebből következik, hogy 0 a gyökökön kívül fekszik; kisebb a gyököknél, ha a gyökök összege is pozitív, azaz ha

(5) $$2R^2+a^2-al > 0, \quad \text{ill.} \quad l < \frac{2R^2+a^2}{a} \dots$$

[2]

Továbbá $f(2R) = 4R^2l^2$, tehát $2R$ is a gyökökön kívül van és ezeknél mindig nagyobb, mert a gyökök félösszege

$$\frac{2R\left(2R^2+a^2-al\right)}{a^2+4R^2} < 2R, \quad \text{hacsak} \quad 2R^2 > -al.$$

Ez pedig igaz. Végül

$$f\left[\frac{2R(a-l)}{a}\right] = \frac{16R^4l}{a^2}(l-a).$$

[1] Egyenlőség áll elő, ha $l = a$. Ekkor a 2) egyik gyöke zérus.

[2] $\dfrac{2R^2+a^2}{a} > \dfrac{a+\sqrt{a^2+4R^2}}{2}$. T. i. kellő rendezés után keletkezik:
$\left(4R^2+a^2\right)^2 > a^2\left(a^2+4R^2\right)$. Ez pedig igaz. Ha tehát $l$ eleget tesz annak a feltételnek, amelynek kielégítése szükséges ahhoz, hogy a gyökök valósak legyenek, akkor az 5) is ki van elégítve.

Ez negatív, ha $l < a$; ezen esetben $\dfrac{2R(a-l)}{a}$ az $f(x) = 0$ gyökei között van, tehát csak a nagyobbik gyök felel meg.

Ha azonban $l > a$, mind a két gyök megfelel, mert

$$\frac{2R(a-l)}{a} < \frac{2R\big(2R^2 + a^2 - al\big)}{a^2 + 4R^2}.$$

Ugyanis ezen egyenlőtlenséget rendezve, $l > \dfrac{a}{2}$ áll elő; ez pedig igaz, mert $l > a$ esetet vettük figyelembe.

Összefoglalva: ha $0 < l < a$, a 2) egyenletnek csak az egyik, t. i. a nagyobbik gyöke felel meg.

Ha $a < l < \dfrac{a + \sqrt{a^2 + 4R^2}}{2}$, mind a két gyök megfelel.

Ha $l = 0$, akkor a $\dfrac{2R(a-l)}{a} \leqq x \leqq 2R$ feltétel az $2R \le x \le 2R$ feltételhez vezet, azaz $x = 2R$. Tehát, ha $l = 0$, akkor a 2)-nek csak az egyik (a nagyobbik) gyöke felel meg és ez valóban: $x = 2R$.

Ha $l = a$, akkor $x' = 0$, $x'' = \dfrac{8R^3}{a^2 + 4R^2}$.

Ha

$$l = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4R^2}}{2}, \quad x' = x'' = \frac{R\big(4R^2 + a^2 + \sqrt{a^2 + 4R^2}\big)}{a^2 + 4R^2}.$$

Vizsgáljuk már most $l$ változását:

$$l = \frac{a(2R - x)}{2R} + \sqrt{x(2R - x)}.$$

$x = 0$ mellett $l = a$. (T. i. $MN = SA = a$, $MP = 0$).

$x = 2$ mellett $l = 0$. (T. i. $MN = 0$ és $MP = 0$; az $M$ pont $B$-be került.)

$$l' = \frac{dl}{dx} = -\frac{a}{2R} + \frac{2(R - x)}{2\sqrt{x(2R - x)}} = \frac{-a\sqrt{x(2R - x)} + 2R(R - x)}{2R\sqrt{x(2R - x)}}.$$

(6) $$\frac{dl}{dx} = 0, \quad \text{ha} \quad a\sqrt{x(2R - x)} = 2R(R - x)\ldots$$

A baloldal pozitív; kell, hogy a jobboldal is az legyen. Tehát az egyenletet csak $x < R$ érték elégítheti ki.

Négyzetre emelve a 6) mindkét oldalán és rendezve:

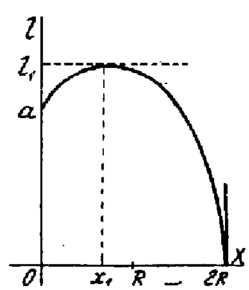
(7) $$g(x) \equiv x^2 - 2Rx + \frac{4R^4}{a^2 + 4R^2} = 0\ldots$$

A gyökök valósak és pozitívok; összegük $2R$ és így az egyik nagyobb, a másik kisebb, mint $R$. $g(x) = 0$ kisebbik gyöke

$$x_1 = R\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4R^2}}\right).$$

A szóbanforgó közben, t. i. $x = 0$ és $x = 2R$ között, $\dfrac{dl}{dx}$ csak egy esetben tűnik el, t. i. ha $x = x_1$. Ezen közben $l$ és $\dfrac{dl}{dx}$ $x$-nek folytonos függvénye; ha $x < x_1$, akkor $\dfrac{dl}{dx} > 0$, ha $x > x_1$, akkor $\dfrac{dl}{dx} < 0$. Így az $x = x_1$ helyen $l$-nek maximuma van és ennek értéke

$$l_1 = \frac{1}{2}\big(a + \sqrt{a^2 + 4R^2}\big).$$




$l$ változását feltünteti a következő táblázat:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | | $x_1$ | | $2R$ |
| $l'$ | $\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ |
| $l$ | $a$ | $\nearrow$ | $l_1$ max | $\searrow$ | $0$ |

$l$ változását ábrázoló görbe menetéből igazolhatók az 1), ill. 2) egyenletek diszkussziója közben megállapított eredmények!

$2^0$. A $PNQ\triangle$ területe

$$y = \frac{MN \cdot PQ}{2} = MN \cdot MP = \frac{a}{2R}(2R - x)\sqrt{x(2R - x)}.$$

$y = 0$, ha $x = 0$ és ha $x = 2R$. ($x = 0$ mellett a $PNQ\triangle$ az $SA$ vonaldarabbá, $x = 2R$ mellett a $B$ pontba zsugorodik össze.)

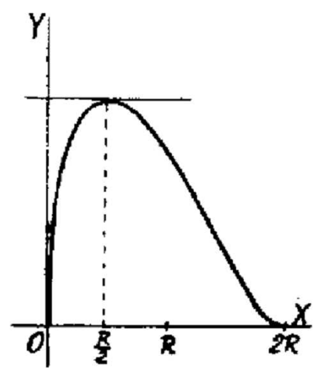
$$y' = \frac{a}{2R}\left[-\sqrt{x(2R - x)} + (2R - x)\frac{2R - 2x}{2\sqrt{x(2R - x)}}\right] =$$
$$= \frac{a(2R - x)(R - 2x)}{2R\sqrt{x(2R - x)}} = \frac{a(R - 2x)\sqrt{2R - x}}{2R\sqrt{x}}.$$

$y' = 0$, ha $x = \frac{R}{2}$ és ha $x = 2R$; továbbá $y' < 0$ ezen két hely között, míg

$$y' > 0, \quad \text{ha} \quad 0 < x < \frac{R}{2}.$$

Következik ebből, hogy $x = \frac{R}{2}$ helyen a függvénynek maximuma van és ennek értéke $y_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{8}aR$.

$x = 2R$ helyen a görbe érintője az $X$-tengely, $x = 0$ helyen az $Y$-tengely.




A függvény változását feltünteti e táblázat:

| $x$ | 0 | | $R/2$ | | $2R$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+\infty$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
| $y$ | 0 | $\nearrow$ | $\frac{3\sqrt{3}}{8}aR$ max | $\searrow$ | 0 |

*Részben megoldotta: Sándor Gy.*