Kiindulunk a kúpszeletek azon meghatározásából, amely szerint a kúpszelet mértani helye azon pontoknak, amelyekre nézve egy szilárd ponttól és egy szilárd egyenestől való távolságuk viszonya állandó. Az adott esetben a szilárd pont az origó, a kúpszelet egyik gyújtópontja és a szilárd egyenes a hozzá tartozó vezérvonal; ennek egyenlete $x-d=0$.

Valamely $P(x,y)$ pontra nézve az origótól való távolság: $\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

A P pont távolsága az adott egyenestől $|x-d|$.

P pontnak ki kell elégítenie a következő egyenletet:

$$\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{|x-d|}=k \quad \text{ill.} \quad x^2+y^2-\lambda(x-d)^2=0\ldots \tag{1}$$

ahol $\lambda=k^2$ tetszőleges pozitív szám (ill. zérus), paraméter.[1] Az 1) kúpszelet sereg egyenlete: a seregben vannak ellipszisek, egy parabola és hiperbolák.

Vizsgáljuk már most ezen kúpszeletek azon pontjait, amelyekhez tartozó érintők párhuzamosak az $y=x$ egyenessel, azaz ezen érintők irányhatározója: 1.

Az 1) egyenletet x szerint differenciálva

$$2x+2yy'-2\lambda(x-d)=0, \quad \text{ill.} \quad x+yy'-\lambda(x-d)=0\ldots \tag{2}$$

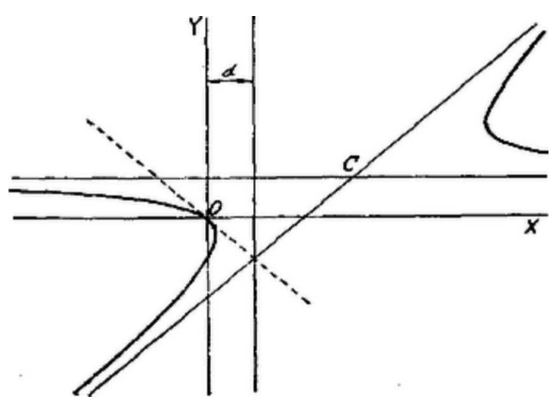
Ha y', az érintő irányhatározója $=1$, akkor az érintési pontok koordinátái között az

$$x+y-\lambda(x-d)=0\ldots \tag{3}$$

összefüggés áll fenn. Az (1) és (3) egyenletekből álló rendszert x és y szerint megoldva x és y, mint λ paraméter függvényei állíthatók elő: így az érintési pontok mértani helyének paraméteres egyenleteit kapjuk. Ha pedig az (1)-ből, (3)-ból λ-t kiküszöböljük, az érintési pontok x, y koordinátái közötti összefüggéshez, a szóbanforgó mértani hely egyenletéhez jutunk.

(3)-ból $\lambda=\dfrac{x+y}{x-d}$. Ha ezt (1)-be behelyettesítjük, keletkezik:

$$\begin{gathered} x^2+y^2-(x+y)(x-d)=0 \\ \text{vagy} \quad y^2-xy+d(x+y)=0\ldots \end{gathered} \tag{4}$$



A (4) nyilvánvalóan hiperbola egyenlete; a quadratikus tagok:
$y^2-xy=y(y-x)$. Ebből azt olvashatjuk ki, hogy e hiperbola aszimptotái az $y=0$ és $y-x=0$ egyenesekkel párhuzamosak. A hiperbola középpontját a

$$-y+d=0\ldots \tag{5}$$

$$2y-x+d=0\ldots \tag{6}$$

egyenletrendszer határozza meg; a középpont koordinátái: $3d$, d Eszerint az aszimptoták egyenletei:

$$y=d\ldots \tag{7}$$

$$y=x-2d\ldots \tag{8}$$

(4)-ből következik, hogy az $x+y=0$ egyenes a hiperbolát az origóban érinti. ($y=-x$ egyenesnek a 4) hiperbolával két összeeső közös pontja van az origóban!)

[1] $\lambda=0$ esetben az $x^2+y^2=0$ (zérus sugarú) körhöz jutunk.