Az egyenes egyenlete legyen $ax + by + c = 0$. Ezen egyenesnek és az $y = x^3$ görbének közös pontjaira nézve:

$$ax + bx^3 + c = 0 \ldots \tag{1}$$

Ha ezen egyenlet gyökei x_1, x_2, x_3 (t. i. a közös pontok abszcisszái), akkor a szóban forgó pontok vetületei az $y = x^2$ parabolán ugyanezen x_i értékekhez tartoznak; ezek koordinátái tehát: $\left(x_i,\ x_i^2\right)$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Mármost ki kell mutatnunk, hogy az $\left(x_i,\ x_i^2\right)$ $i = 1,\ 2,\ 3$ pontok és az origó egy körön feküsznek.

Egy tetszőleges kör egyenlete:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \ldots \tag{2}$$

Ezen kör keresztülmegy az $\left(x_i,\ x_i^2\right)$ pontokon, ha

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1 + Bx_1^2 + C + x_1^2 + x_1^4 = 0 \\ Ax_2 + Bx_2^2 + C + x_2^2 + x_2^4 = 0 \\ Ax_3 + Bx_3^2 + C + x_3^2 + x_3^4 = 0 \end{array}\right\} \text{I.}$$

Minthogy az origó is pontja a körnek, $C = 0$. Így azonban az A és B kiszámítására három egyenletünk van. Ezen egyenletekből álló rendszernek akkor van egy és csakis egy megoldása, ha a determinánsa eltűnik, azaz, ha[1]

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & x_1^2 + x_1^4 \\ x_2 & x_2^2 & x_2^2 + x_2^4 \\ x_3 & x_3^2 & x_3^2 + x_3^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & x_1^4 \\ x_2 & x_2^2 & x_1^4 \\ x_3 & x_3^2 & x_1^4 \end{vmatrix} = x_1x_2x_3 \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0 \ldots \tag{3}$$

Azonban – az általában zérustól különböző – x_1, x_2, x_3 az 1) egyenlet gyökei, tehát

$$\left.\begin{array}{l} c + ax_1 + bx_1^3 = 0 \\ c + ax_2 + bx_2^3 = 0 \\ c + ax_3 + bx_3^3 = 0 \end{array}\right\} \text{II.}$$

A II. egyenletrendszer az a, b, c együtthatókra nézve homogén lineáris egyenletrendszer csak úgy állhat meg, ha determinánsa eltűnik, azaz, ha

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix} = 0 \ldots \tag{5}$$

Mivel tehát ez , a 3) alatti feltétel is ki van elégítve: a szóbanforgó 4 pont valóban egy körön fekszik.

Jegyzet. Az 1) gyökeire nézve: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ennek tekintetbe vételével is kimutatható, hogy az 5) baloldalán álló determináns eltűnik. Fejtsük ki az első oszlop tagjai szerint. Keletkezik:

$$\begin{gathered} \left(x_2x_3^3 - x_2^3x_3\right) - \left(x_1x_3^3 - x_1^3x_3\right) + \left(x_1x_2^3 - x_2x_1^3\right) = \\ = x_2x_3\left(x_3 - x_2\right)\left(x_3 + x_2\right) - x_3x_1\left(x_3 - x_1\right)\left(x_3 + x_1\right) + x_1x_2\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1\right) = \\ = -x_1x_2x_3(x_3 - x_2) + x_1x_2x_3(x_3 - x_1) - x_1x_2x_3(x_2 - x_1) = \\ = -x_1x_2x_3\left(-x_3 + x_2 + x_3 - x_1 - x_2 + x_1\right) = 0. \end{gathered}$$

[1] Az determináns értéke nem változik, ha egy oszlop tagjait kivonjuk egy másik oszlop megfelelt tagjaiból; az egy-egy sor tagjainak közös tényezőjét pedig kiemelhetjük.