Jelölje a az ellipszis fél nagy tengelyét, b a fél kis tengelyét. Az ellipszis egyenlete a főtengelyekre, mint koordinátatengelyekre vonatkozik, úgy, hogy az X tengely a nagytengely tartója. Ha az ellipszist a kis tengelye, azaz az X-tengely körül forgatjuk, akkor az így keletkező ellipszoid köbtartalma:

$$V_e = 2\pi\int_0^b x^2 dy = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\int_0^b (b^2 - y^2)dy = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\left[b^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^b =$$

$$= 2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^3 - \frac{b^3}{3}\right) = \frac{4\pi a^2 b}{3}.$$

1. Írjunk az ellipszisbe téglalapot; az első negyedbe eső csúcsának koordinátái: a_1, b_1,. Ha e téglalapot az Y-tengely körül forgatjuk, az így keletkező henger térfogata: $a_1^2\pi\cdot 2b_1$.

a_1, b_1 kielégítik az ellipszis egyenletét:

$$b^2a_1^2 + a^2b_1^2 = a^2b^2, \quad \text{tehát} \quad a_1^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - b_1^2)$$

A henger térfogata: $V_1 = 2\pi\frac{a^2}{b^2}(b^2b_1 - b_1^3)$.
A henger térfogata itt b_1 függvénye. Szélső értéke akkor áll elő, ha b_1 szerinti differenciál hányadosa eltűnik, azaz ha

$$V_1' = 2\pi\frac{a^2}{b^2}(b^2 - 3b_1^2) = 0 \quad \text{tehát ha} \quad b_1 = b\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Ezen b_1 érték mellett V_1-nek maximuma van, mert V_1' pozitív értékekből megy át negatív értékekbe.

a_1 értékére nézve ekkor

$$a_1^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(b^2 - \frac{b^2}{3}\right) = \frac{2a^2}{3}, \qquad a_1 = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

A henger maximális térfogata pedig

$$V_h = 2\pi\frac{a^2}{b^2}\left(b^3\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{b^3}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4\pi a^2 b}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = V_e\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$V_h : V_e = 1 : \sqrt{3}.$$

Ezen hengerbe írt ellipszoid olyan ellipszis forgásából keletkezik, melynek fél nagytengelye $a_1 = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, fél kistengelye $b_1 = b\sqrt{\frac{1}{3}}$. Ezen ellipszoid térfogata

$$\frac{4\pi a_1^2 b_1}{3} = \frac{4\pi a^2 b^2}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = V_e\cdot\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Az egymás után következő ellipszoidok térfogatai eszerint oly mértani haladványt alkotnak, melynek hányadosa: $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{4}{27}} < 1$. A végtelen mértani sor összetartó és összege

$$S_e = V_e\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{4}{27}}} = V_e\frac{1 + \sqrt{\frac{4}{27}}}{1 - \frac{4}{27}} = \frac{27}{23}V_e\left(1 + \sqrt{\frac{4}{27}}\right)$$

$$S_e = \frac{36}{23}a^2b\pi\left(1 + \sqrt{\frac{4}{27}}\right) = \frac{36}{23}a^2b\pi\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}\right).$$

Az ellipszoidokba írt legnagyobb térfogatú hengerek térfogatai is olyan mértani sort alkotnak, melynek hányadosa $\sqrt{\frac{4}{27}}$. Láttuk ugyanis, hogy

$$V_h = V_e\sqrt{\frac{1}{3}}$$

így

$$\sum V_h = \sqrt{\frac{1}{3}}\sum V_e, \quad \text{vagy} \quad S_h = S_e\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

$$S_h : S_e = 1 : \sqrt{3} \quad \text{vagy} \quad S_h : S_e = \sqrt{3} : 3.$$

Krisztonosich Jenő (Szent László g. VIII. o. Bp. X.)