I. Megoldás.

$$
\begin{aligned}
2^{3n+3} &= (2^3)^{n+1} = 8^{n+1} = (7+1)^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0}7^{n+1} + \binom{n+1}{1}7^{n} + \binom{n+1}{2}7^{n-1} + \ldots + \\
&\quad + \binom{n+1}{n-1}7^{2} + \binom{n+1}{n}7 + \binom{n+1}{n+1} = \\
&= 7^2M + \frac{(n+1)!}{n!1!}7 + 1 = 7^2M + (n+1)7 + 1 = 7^2M + 7n + 8.
\end{aligned}
$$

Eszerint

$$
2^{3n+3} - 7n + 41 = 7^2M + 7n + 8 - 7n + 41 = 49M + 49,
$$

azaz a szóbanforgó kifejezés 49 többszöröse.

Csuri Vilmos (Kossuth Lajos g. VII. o. Pestszenterzsébet.)

II. Megoldás. $41 = 49 - 8$, tehát azt kell kimutatunk, hogy $2^{3n+3} - 7n - 8 = 8^{n+1} - 7n - 8$ osztható 49-cel. Mármost

$$
\begin{aligned}
8^{n+1} - 7n - 8 &= 8^{n+1} - 1 - (n+1)7 = \\
&= (8-1)\big(8^n + 8^{n-1} + \ldots + 8 + 1\big) - (n+1)7 = \\
&= 7\big(8^n + 8^{n-1} + \ldots + 8^2 + 8 - n\big) = \\
&= 7\big[\big(8^n - 1\big) + \big(8^{n-1} - 1\big) + \ldots + \big(8^2 - 1\big) + (8-1)\big].
\end{aligned}
$$

A szögletes zárójelen belül álló különbségek mindegyike és így összegük is osztható 7-tel, az egész kifejezés pedig $7 \cdot 7 = 49$-cel.

Szittyai Dezső (Wágner g. V. o. Rákospalota.)

III. Megoldás. Legyen $f(n) = 2^{3n+3} - 7n + 41$. Ha $n = 0$, akkor $f(0) = 2^3 + 41 = 49$; ha $n = 1$, $f(1) = 2^6 - 7 + 41 = 98$. Tegyük fel, hogy $f(n)$ osztható 49-cel; kimutatjuk, hogy akkor $f(n+1)$ is 49 többszöröse.

$$
\begin{aligned}
&f(n+1) = 2^{3(n+1)+3} - 7(n+1) + 41 = 2^3 \cdot 8^{n+1} - 7n - 7 + 41 \\
&f(n) = 2^{3n+3} - 7n + 41 = 8^{n+1} - 7n + 41 \\
&f(n+1) - f(n) = 8^{n+1}\big(2^3 - 1\big) - 7 = 7\big(8^{n+1} - 1\big).
\end{aligned}
$$

Azonban $8^{n+1} - 1$ osztható 7-tel, tehát

$$
f(n+1) - f(n) = 7 \cdot 7M = 49M.
$$

Ebből következik, hogy ha $f(n)$ többszöröse 49-nek, akkor $f(n+1)$ is az. Azonban $f(n)$ többszöröse 49-nek, ha $n = 0$, $n = 1$, tehát többszöröse az n minden egész számú értéke mellett.

Halász Iván (Berzsenyi Dániel g. VII. o. Bp.)