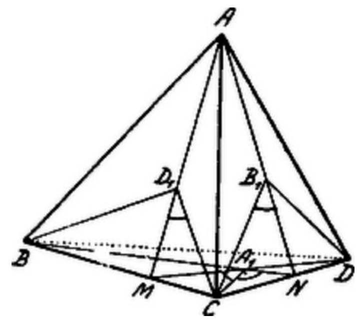
1.^{0} Ha az $ABC\triangle$-n belül van olyan P pont, amelyből minden oldal 120°-ú szög alatt látható, azaz

$$APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = CPA\sphericalangle = 120^\circ \ldots \tag{1}$$

akkor az AP egyenes felezi a $BPC\sphericalangle$-et, BP a $CPA\sphericalangle$-et, CP az $APR\sphericalangle$-et.

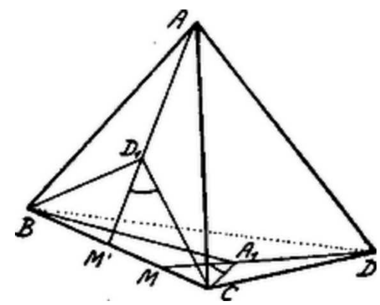
Ha viszont AP felezi a $BPC\sphericalangle$-et, BP a $CPA\sphericalangle$-et, CP az $APB\sphericalangle$-et, akkor az (1) egyenlőség áll elő.



2.^{0} Legyen $ABCD$ izogónikus tetraéder. A beírt gömb érintési pontjai A_1, B_1, C_1, D_1. Feltevésünk szerint a BCD határlapon az A_1-et a csúcsokkal összekötő transzverzálisok szögei 120°-úak. 1.^{0} szerint DA_1 felezi a $BA_1C\sphericalangle$-et és BC-t az M pontban metszi.

Az ABC lapon $BD_1C\sphericalangle = 120^\circ$ és AD_1 felezi ezt. Mivel pedig $BA_1 = BD_1, CA_1 = CD_1$,[1] azért $BA_1C \overset{\infty}{=} BD_1C\triangle$; a $BD_1C\sphericalangle$-et felező egyenes ugyanazon M pontban metszi BC-t, mint a $BA_1C\sphericalangle$-et felező egyenes. Ebből következik, hogy AA_1 és DD_1 – az ADM síkban fekvő egyenesek – metszik egymást.

Hasonlóan mutatható ki, hogy a BB_1 ill. CC_1 egyenes, mely nem fekszik az ADM síkban, metszi az AA_1-t és DD_1-t is: tehát kell, hogy úgy BB_1 mint CC_1 ezek metszőpontján menjen keresztül. Azaz: ha a tetraéder izogónikus, a tetraéderbe írt gömb érintési pontjait a szemközti csúcsokkal összekötő transzverzálisok egy ponton mennek keresztül.



3.^{0} Legyen $ABCD$ nem izogónikus tetraéder, amelynél pl. $AD_1C\sphericalangle \neq CA_1D\sphericalangle$. Ebben az esetben DA_1 és AD_1 nem metszik BC-t ugyanazon pontban. DA_1 és BC metszéspontja legyen M, az AD_1 és BC metszéspontja M'.

Bang-tétele értelmében $BA_1C\sphericalangle = BD_1C\sphericalangle$ és így $BD_1C\triangle \overset{\infty}{=} BA_1C\triangle$. Azonban

$$CA_1M\sphericalangle = 180^\circ - CA_1D\sphericalangle$$

és
$$CD_1M'\sphericalangle = 180^\circ - AD_1C\sphericalangle.$$

Minthogy $CA_1D\sphericalangle \neq AD_1C\sphericalangle$, azért $CA_1M\sphericalangle \neq CD_1M'\sphericalangle$ és így M és M' különböző pontok. Most az AA_1 és DD_1 transzverzálisok nem metszhetik egymást, mert két különböző síkban feküsznek úgy, hogy nem mennek keresztül a két sík közös egyenesének, AD-nek ugyanazon pontján.

Ha tehát a tetraéder nem izogónikus, a szóbanforgó transzverzálisok nem metszik egymást. (Kitérő egyenesek!)

Weisz Alfréd (Bolyai g. VIII. o. Bp. V.)

Jegyzet. Kimutathatjuk azt is, hogyha a tételben szereplő transzverzálisok egy ponton mennek keresztül, akkor a tetraéder izogónikus.

Ha ugyanis AA_1 és DD_1 metszik egymást, akkor ezek síkja a BC élt az M pontban metszi és – az előbbiek szerint – $MA_1C\sphericalangle = MD_1C\sphericalangle$. Az AA_1 és BB_1 transzverzálisok is metszik egymást; síkjuk a CD élt az N pontban metszi és így $CB_1N\sphericalangle = CA_1N\sphericalangle$.

Azonban Bang-fétele szerint $AD_1C\sphericalangle = AB_1C\sphericalangle$ és így ezek mellékszögei is egyenlők, t. i. $MD_1C\sphericalangle = CB_1N\sphericalangle$. Ezért egyszersmind $MA_1C\sphericalangle = CA_1N\sphericalangle$,

[1] Egy pontból a gömbhöz húzott érintő-darabok egyenlők!

azaz $\quad CA_1$ *felezi az* MA_1N *ill.* $BA_1D\sphericalangle$*-et.*

Hasonlóan: DA_1 felezi a $BA_1C\sphericalangle$-et és BA_1 felezi a $CA_1D\sphericalangle$-et Ebből következik 1.^{0} szerint, hogy

$$BA_1C\sphericalangle - CA_1D\sphericalangle = DA_1B\sphericalangle = 120^\circ.$$

Ugyanez áll a többi lapokon is, a beírt gömb érintési pontjait illetőleg, tehát a tetraéder izogónikus.

Weisz Alfréd (Bolyai g. VIII. o., Bp. V.)