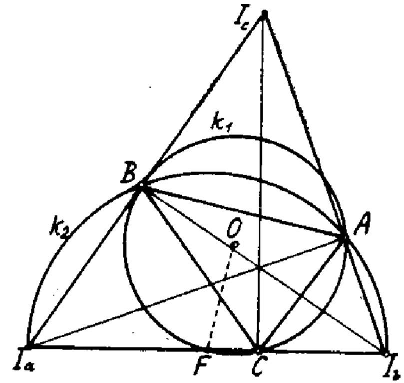
Az 1397. feladatban (II. megoldás) láttuk, hogy az $ABC\triangle$ a hozzátartozó $I_aI_bI_c\triangle$-nek talpponti háromszöge; az $ABC\triangle$ köré írt k_1 kör az $I_aI_bI_c\triangle$-re nézve Feuerbach-kör és ezen a magasságok talppontjain (A, B, C), továbbá az oldalak felezőpontjain megy keresztül.



Ezek szerint az $I_aI_bI_c\triangle$ Feuerbach-körét meg tudjuk szerkeszteni; ugyanis középpontja a megadott O pont és keresztülmegy az I_aI_b távolság F felezőpontján. E kör sugara OF és e körnek az I_aI_b egyenessel való másik metszéspontja a a keresett háromszög C csúcsa.

Az A és B csúcsok meghatározása céljából tekintetbe vesszük, hagy egyrészt az előbbi k_1 körön, másrészt – Thales tétele szerint – az I_aI_b átmérőjű k_2 körön feküsznek. (Ezen kör középpontja F, sugara $\frac{1}{2}I_aI_b$)

Tehát A és B a k_1 és k_2 körök közös pontjai. Vizsgáljuk már most a szerkesztés lehetőségének feltételeit.

1^0. Szükséges, hogy a k_1 és k_2 köröknek két közös pontjuk legyen. Minthogy a két kör centrálisa: OF, a k_1 kör sugara, ez kisebb, mint e két sugár összege. Marad a következő feltétel kielégítése:

$$OF > \frac{1}{2}I_aI_b - OF \quad \text{vagy} \quad OF > \frac{1}{2}I_aI_b,$$

2^0. Az $I_aI_bI_c\triangle$ mindenkor hegyesszögű háromszög.[1] Tehát kell, hogy talpponti háromszögének csúcsai az oldalakra essenek (nem a meghosszabbításukra). A C pontnak I_a és I_b közé kell esnie, azaz $\overline{FC} < \frac{1}{2}I_aI_b$.

Ha O vetülete az I_aI_b egyenesen P, akkor P felezi FC-t (a k_1 kör húrját), és így $FC = 2FP$. Így

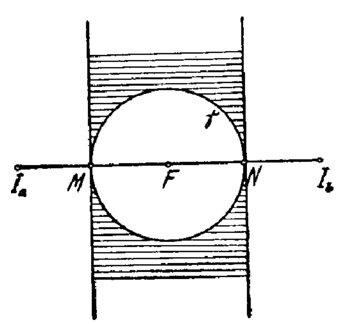
$$\text{(II)} \qquad 2FP < \frac{1}{2}I_aI_b \quad \text{ill.} \quad \overline{FP} < \frac{1}{4}I_aI_b \ldots.$$

a szerkesztés lehetőségének további feltétele.

E két feltételt kielégítve, az $ABC\triangle$ valóban szerkeszthető és megfelel a követelménynek.

Sándor Gyula (Kölcsey Ferenc g. VII. o. Bp. VI)

Jegyzet. Azon O pontok mértani helye, melyekre nézve $OF = \frac{1}{4}I_aI_b$ oly γ kör, melynek középpontja az I_aI_b távolság F felezőpontja és sugara $\frac{1}{4}I_aI_b$,



Az I. feltétel azt jelenti, hogyha az I_a, I_b pontokat rögzítjük, az O *pontnak a* γ *körön kívül kell feküdnie.*

Húzzunk ezen γ körhöz az MN átmérőjének végpontjaiban érintőket. A II. feltétel azt jelenti, hogy az O pontnak ezen két egyenes között kell feküdnie.

A két feltételt egyesítve, az O pontnak a sík azon részében kell feküdnie, melyet ábránkban a vonalkázás jelez.

[1] Ha $ABC\triangle$ szögei α, β γ, és $I_aI_bI_c\triangle$-é: $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $90^\circ - \frac{\beta}{2}$, $90^\circ - \frac{\gamma}{2}$.