I. Megoldás. Vizsgáljuk az

$$y = 4\sin t + \cos 2t$$

függvény változását, differenciálhányadosa segítségével.

$$y' cost - 2\sin 2t = 4\cos t - 4\sin t\cos t = 4\cos t(1-\sin t).$$

Keressük a függvény szélső értékeit: mikor lesz $y' = 0$?

$$y' = 0, \quad \text{ha} \quad \cos t = 0 \quad \text{vagy} \quad 1 - \sin t = O.$$

Ha $1-\sin t = 0$, akkor mindig $\cos t = 0$. Azonban, ha $\cos t = 0$, akkor vagy $1 - \sin t = 0$, vagy $1 + \sin t = 0$.

I. Legyen $\cos t = 0$, tehát, ha 0 és 2π között maradunk: $t = \frac{\pi}{2}$ vagy $t = \frac{3\pi}{2}$ Vizsgáljuk y' előjelét ezen helyek környezetében.[1]

$$\begin{aligned} a)\quad t &= \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \quad \text{akkor} \quad \cos t > 0, \quad 1 - \sin t > 0; \quad \text{így} \quad y' > 0, \\ t &= \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad \text{akkor} \quad \cos t < 0, \quad 1 - \sin t > 0; \quad \text{így} \quad y' < 0. \end{aligned}$$

Eszerint a $t = \frac{\pi}{2}$ helyen függvényünknek maximuma van és ennek értéke:

$$y_{\max} = 4\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 4 - 1 = 3.$$

$$\begin{aligned} b)\quad t &= \frac{3\pi}{2} - \varepsilon, \quad \text{ekkor} \quad \cos t < 0, \quad 1 - \sin t > 0; \quad \text{tehát} \quad y' < 0, \\ t &= \frac{3\pi}{2} + \varepsilon, \quad \text{ekkor} \quad \cos t > 0, \quad 1 - \sin t > 0; \quad \text{tehát} \quad y' > 0. \end{aligned}$$

Eszerint a $t = \frac{3\pi}{2}$ helyen függvényünknek minimuma van és ennek értéke

$$y_{\min} = 4\sin\frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi = -4 - 1 = -5.$$

II. $1 - \sin t = 0$ mellett $t = \frac{\pi}{2}$ és $\cos t = 0$. Ezen eset az I. *a)* alattinak felel meg.

Kemény György (Szent. István g. VIII. o. Bp. XIV.).

II. Megoldás. $y = 4\sin t + \cos 2t = 4\sin t + 1 - 2\sin^2 t$.

Legyen $\sin t = x$. Így $\quad y = -2x^2 + 4x + 1$
másodfokú függvény változását kell vizsgálnunk, ha $-1 \leqq x \leqq +1$. Ezen függvénynek az $x = 1$ helyen maximuma van és $y_{\max} = -2 - 4 + 1 = 3$. Minthogy tehát ezen függvény $x = -1$-től folyton növekedik $x = +1$-ig, $x = -1$ helyen (abszolút) minimuma van és ezen $y_{\min} = -2 - 4 + 1 = -5$.

Bluszt Ernő és *Marosán Zoltán* (Kossuth Lajos g. VIII. o. Pestszenterzsébet)

III. Megoldás. Vizsgáljuk, hogy

$$-2x^2 + 4x + 1 = k \quad \text{vagy} \quad f(x) \equiv 2x^2 - 4x + k - 1 = 0$$

egyenletnek k mely értékei mellett vannak olyan valós megoldásai, amelyek -1 és $+1$ között vannak?

Valósak a gyökök, ha

$$16 - 8(k-1) \geqq 0 \quad \text{azaz, ha} \quad k \leqq 3.$$

Már most $\qquad f(-1) = 5 + k, \quad f(+1) = -3 - k.$

Ha $k < 3$, akkor $f(+1) \leqq 0$.

$f(-1) \geqq 0$, ha $k \geqq -5$. Tehát $f(+1)$ és $f(-1)$ ellenkező elöjelüek, ha $-5 < k < 3$.

Eszerint, ha $-5 \leqq k \leqq +3$. egyenletünknek egy és csakis egy megoldása van ágy, hogy $-1 \leqq x = \sin t \leqq +1$.

[1] A következőkben ε tetszőleges kicsiny poz. számot jelent.

Ha azonban $k < -5$, akkor $f(-1) < 0$. Ebben az esetben $f(-1)$ és $f(+1)$ megegyező elöjelüek. Az $f(x) = 0$ mindkét gyöke a $[+1,\ -1]$ intervallumon kívül esik, hiszen a gyökök félösszege $+1$.

Taksony György (Ág. ev. g. VII. o. Bp.).

IV. Megoldás. $y = 1 + 4\sin t - 2\sin^2 t = 3 - 2(1-\sin t)^2$,

$$\sin t \leqq 1, \quad \text{tehát} \quad (1-\sin t)^2 \geqq 0 \quad \text{és így} \quad y \leqq 3,$$

$$\sin t \geqq -1, \quad \text{tehát} \quad (1-\sin t)^2 \leqq 2^2 \quad \text{és így} \quad y \geqq 3 - 2\cdot 4, \quad \text{azaz} \quad y \geqq -5.$$

Egri György János (Kölcsey Ferenc g. VIII. o., Bp. VI.).